Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) := (x^2+y^2+z, x+z, x^2-y+3)^\top$ sowie das Flächenstück $F_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2+y^2 \leq R^2, z = R^2-x^2-y^2\}$ ($R \in \mathbb{R}$ fest).

a) Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{r}$ der (bzgl. der $xy-$Ebene positiv orientierten) Randkurve C_R von F_R an und berechnen Sie direkt das Kurvenintegral $\int\limits_{C_R} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ längs C_R.

Lösung: *Parametrisierung von* C_R : $\vec{r} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)^\top$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$

Damit folgt

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)^\top$ *sowie* $\vec{v}(\vec{r}) = (R^2, R\cos\varphi, R^2\cos^2\varphi - R\sin\varphi + 3)^\top$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_R} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (-R^3\sin\varphi + R^2\cos^2\varphi)\, d\varphi \\
&= R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = R^2\pi
\end{aligned}$$

b) Bestätigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes unter Berechnung des Flusses von $\operatorname{rot}\vec{v}$ von unten nach oben durch F_R das Ergebnis aus **a)**.

Lösung: *In kartesischen Koordinaten: Berechnung der Normalenvektors* $\vec{n}$:

$$z = f(x,y) = R^2 - x^2 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}(x,y) = \begin{pmatrix} -\partial x f(x,y) \\ -\partial y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Rotation von $\vec{v}$:

$$rot\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2x+1 \\ -2y+1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_R} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \iint\limits_{F_R} rot\,\vec{v} \cdot \vec{n}\, dx\, dy \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} (-4r\cos\varphi - 4r^2\cos\varphi\sin\varphi + 1) \cdot r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r\, dr\, d\varphi = R^2\pi.
\end{aligned}$$

Gegeben sei die komplexe Funktion $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z)^2+1}$.

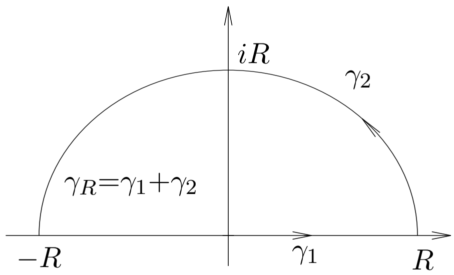
a) Bestimmen Sie die Residuen von f.

Lösung: $(z+1)^2 = -1 \Rightarrow z+1 = \pm i \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm i$

$$Res\ f|_{z=1+i} = \frac{e^{iz_1}}{2(z_1+1)} = \frac{e^{i(-1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1}e^{-i}}{2i},\quad Res\ f|_{-1-i} = \frac{e^{i(-1-i)}}{-2i} = \frac{ee^{-i}}{-2i}$$

b) Sei

- γ_1 die Strecke von $-R$ nach R,
- γ_2 die positiv orientierte Halbkreislinie um 0 vom Radius R in der oberen Halbebene mit der Parameterdarstellung $z = Re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$
- und $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$ (Siehe Skizze).



Berechnen Sie $\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz$ für $R > \sqrt{2}$.

Lösung: *Nur z_1 liegt innerhalb des Weges. Daher gilt mit dem Residuensatz:*

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\ Res\ f|_{z_1} = \pi e^{-1}e^{-i} = \frac{\pi}{e}(\cos 1 - i\sin 1)$$

c) Zeigen Sie: $\lim\limits_{R\to\infty} \left| \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = 0$.

Lösung: $z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$: $\left|\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le R\pi \max\limits_{\varphi} \dfrac{|e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}|}{|(Re^{i\varphi}+1)^2+1|}$

$$= \max_{\varphi} \frac{R\pi\,|e^{iR\cos\varphi}e^{-\sin\varphi}|}{|R^2e^{2i\varphi}+2Re^{i\varphi}+2|} \le \frac{\pi}{R}\frac{1}{\min\limits_{\varphi}|e^{2i\varphi} + \underbrace{\frac{2}{R}e^{i\varphi} + \frac{2}{R^2}}_{\to 0}|} \to 0 \ \textit{für}\ R \to \infty$$

d) Bestimmen Sie nun $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz$ und damit die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x)^2+1}\,dx \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2+1}\,dx.$$

Lösung: *Wegen* $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ *gilt* $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ix}}{(1+x)^2+1}\,dx$

$$= \frac{\pi}{e}(\cos 1 - i\sin 1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x)^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}\cos 1,\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2+1}\,dx = -\frac{\pi}{e}\sin 1$$

Sei $g : [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ mit $g(x) = x(\pi - x)$.

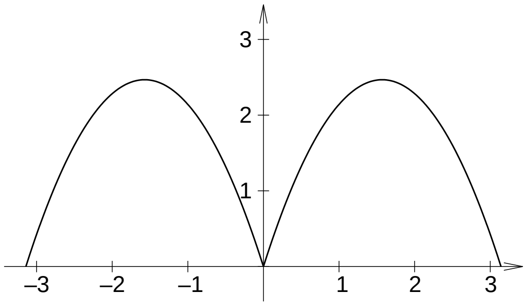
a) Bestimmen Sie f so, dass

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } \ 0 \le x \le \pi \\ g(-x) & \text{für } \ -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

gilt, also f eine gerade Funktion ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ -x(\pi + x) & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$$



b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der $2\pi-$periodischen Fortsetzung von f.

Geben Sie die ersten 7 Glieder der Reihe explizit an.

Lösung: *Da f gerade ist, gilt $b_n = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$*

$$\pi a_0 = 2\int_0^\pi (\pi x - x^2)\,dx = 2\left(\pi\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^\pi = 2\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\pi a_n = 2\int_0^\pi \underbrace{x(\pi - x)}_{f}\underbrace{\cos nx}_{g'}\,dx = \underbrace{2x(\pi-x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\sin nx$$

$$= \frac{2}{n}(\pi - 2x)\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{4}{n^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos nx\,dx}_{=0} = \frac{2}{n^2}(-\pi\cos n\pi - \pi) = -\frac{2\pi}{n^2}(\cos n\pi + 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & , n = 1,3,5,\ldots \\ -\frac{4}{n^2}\pi & , n = 2,4,6,\ldots \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & \textit{für } n \textit{ ungerade} \\ -\frac{4}{n^2} & \textit{für } n \textit{ gerade} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$

c) An welchen Stellen stimmt die Fourierreihe mit der Funktion überein?

Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourierreihe an einer speziellen Stelle den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Lösung: *Da f im Innern von $[-\pi,\pi]$ stückweise stetig differenzierbar ist und stetig auf ganz $\mathbb{R}$, konvergiert die Fourierreihe $\forall x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$.*

Wegen $f(0) = 0$ gilt: $\Rightarrow \dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Welchen Reihenwert erhält man, wenn die Fourierreihe bei $x = \frac{\pi}{2}$ ausgewertet wird?

Lösung: $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^2}{4} \Rightarrow \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n^2} \Rightarrow \dfrac{\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Gegeben sei die partielle DGL

$$3ty_x + xy_t = (x^2t - 3t^3)\cdot y.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische DGL-System:

$$\dot{x} = \boxed{3t}\,, \quad \dot{t} = \boxed{x}$$

b) und daraus die Phasen-DGL:

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{3\frac{t}{x}}$$

c) Bestimmen Sie ein erstes Integral:

$$u(x,t) = \boxed{\frac{1}{2}(x^2 - 3t^2)}$$

d) Mit der Substitution $u = u(x,t)$, $v = x$ ergibt sich dann

$$y_x = \boxed{x}\cdot y_u + \boxed{1}\cdot y_v \qquad y_t = \boxed{-3t}\cdot y_u + \boxed{0}\cdot y_v$$

e) Die partielle DGL geht damit über in

$$y_v = \boxed{\frac{2}{3}uy}$$

f) Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x,t) = \boxed{A(x^2 - 3t^2)e^{\frac{1}{3}(x^2-3t^2)x}}$$

Gegeben sei die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a) (i) Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = \boxed{1}$, $\lambda_2 = \boxed{2+i}$, $\lambda_3 = \boxed{2-i}$.

(ii) A besitzt die Eigenvektoren: $\vec{v}_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$, $\vec{v}_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}}$, $\vec{v}_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}}$.

(iii) Die allgemeine **komplexe** Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lautet

$$\vec{y}_{kompl.}(x) = \boxed{C_1 e^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(2+i)\,x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} + C_3 e^{(2-i)\,x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}}$$

(iv) Die allgemeine **reelle** Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lautet

$$\vec{y}_{reell}(x) = \boxed{c_1 e^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix} + c_3 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 0 \\ -\cos(x) \end{pmatrix},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

b) Bestimmen Sie für das inhomogene System

$$\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \cos(x) \cdot \vec{b} \qquad (\mathbf{1})$$

eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Ansatz: $\vec{y}_p(x) = \boxed{\cos(x) \cdot \vec{c_1} + \sin(x) \cdot \vec{c_2}}$

Damit ergibt sich eine partikuläre Lösung zu:

$$\vec{y}_p(x) = \boxed{\tfrac{1}{4} \cos(x) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4} \sin(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$