Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. J. Brüdern

Höhere Mathematik I/II **Prüfung** **09.03.09**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 6** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte April auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 20.04.09 (14.00-17.15) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.

a) Zeigen Sie, dass $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
b) Zeigen Sie, dass die positive Lösung g der Gleichung $x = 1 + \frac{1}{x}$ der Ungleichung $g > 1$ genügt.
c) Zeigen Sie, dass $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
d) Bestimmen Sie damit den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben sei das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,dt$. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral existiert und bestimmen Sie dessen Wert mit Hilfe der Substitution $x = \mathrm{e}^t$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2 + (2+2i)z + 4i = 0$ in $\mathbb{C}$ und geben Sie diese in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.
b) Bestimmen Sie die Polardarstellung $r\mathrm{e}^{i\varphi}$ der Zahl $(1+i)$. Berechnen Sie damit $(1+i)^{2009}$ und geben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.
c) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \text{ und } |\mathrm{e}^{iz}| \leq 1\}$ in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3.

a) Zeigen Sie, dass durch $\varphi : V \to V : p(x) \mapsto xp'(x)$ eine lineare Abbildung erklärt ist.
b) Bestimmen Sie den Kern dieser Abbildung, $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{p \in V : \varphi(p) = 0\}$. Ist φ surjektiv?
c) Stellen Sie die lineare Abbildung φ aus a) bezüglich der Basis $1, x, x^2, x^3 + 1$ durch eine Matrix A dar und bestimmen Sie deren Rang.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = xy + \log(2x + y)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ erfüllt und dass die Gleichung in einer Umgebung dieses Punktes nach $y = y(x)$ auflösbar ist.
b) Zeigen Sie durch implizites Differenzieren, dass $y'(0) = -3$ und $y''(0) = 7$ ist.
c) Bestimmen Sie für die Funktion $y(x)$ das Taylor-Polynom vom Grad zwei um den Nullpunkt.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Berechnen Sie mit der Methode von Lagrange diejenigen Punkte auf der durch die Gleichung $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$ gegebenen Fläche im $\mathbb{R}^3$, die vom Ursprung den kleinsten Abstand haben.