2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
phys

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 9** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte April auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 20.04.09 (14.00-17.15) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei die Differentialgleichung $y'(x) = -\frac{x}{1+x^2}y(x) - x^2\sqrt{1+x^2}y(x)^2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung mit Hilfe der Substitution $y = \frac{1}{z}$ in $z'(x) = \frac{x}{1+x^2}z(x) + x^2\sqrt{1+x^2}$ überführen lässt.
b) Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung für die in a) entstandene Differentialgleichung.
c) Berechnen Sie nun eine spezielle Lösung für die in a) entstandene Differentialgleichung.
d) Lösen Sie für die ursprüngliche Differentialgleichung das Anfangswertproblem $y(0) = \frac{1}{2}$.

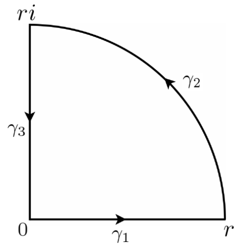
Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für $x, y > 0$ sei das Vektorfeld $V_\alpha(x,y,z) = \left(\alpha\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \log(xy)\right)$ gegeben.

a) Für welche Werte von α besitzt V_α eine Stammfunktion?
Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

b) Berechnen Sie für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ jeweils das Arbeitsintegral von V_α längs des Weges γ, der über die Parametrisierung $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t, 1, \sin(\pi t))$, $t \in [-1, 1]$ gegeben ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)



Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ für $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$.

Wählen Sie hierzu den Integrationsweg aus der Skizze.

Zeigen Sie, dass $\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \to 0$ für $r \to \infty$ und $\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$.

Folgern Sie nun mit dem Residuensatz $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Im $\mathbb{R}^2$ sei die Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, \log(2)]$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Länge L der Kurve γ.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2)$ der Kurve.
Hinweis: $S_i = \frac{1}{L}\int_\gamma x_i\,ds$

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die bei Rotation von γ um die x_1-Achse entsteht.

Hinweis: Die folgenden Formeln könnten hilfreich sein:

$\sinh(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$	$\cosh(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$	$\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$
$\sinh'(t) = \cosh(t)$	$\cosh'(t) = \sinh(t)$	$2\cosh(t)^2 = 1 + \cosh(2t)$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformation $\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i t x}\,dx$.

b) Berechnen Sie die Faltung $(f * f)(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y-x)f(x)\,dx$.

Hinweis: Es ergibt sich $(f * f)(y) = \begin{cases} y\mathrm{e}^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0. \end{cases}$

c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $f * f$.

Aufgabe 6 (11 Punkte)

Sei das Vektorfeld $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\cos(y)^2 \\ y - \sin(y)\cos(y) \\ z + x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ sowie die Flächen $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$ und $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ gegeben. Weiter sei H das von den beiden Flächen eingeschlossene Volumen. Die Orientierung der Normalenvektoren auf F_1 und F_2 sei so gewählt, dass diese jeweils nach außen zeigen.
Bestimmen Sie die Werte folgender Integrale

$$\int_{F_1} \langle V, \mathbf{n} \rangle\ ds, \quad \int_H \mathrm{div} V\ d\mathbf{x} \text{ und } \int_{F_2} \langle V, \mathbf{n} \rangle\ ds.$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Sei die Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - 2x$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $a_n = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx}\, dx$.

b) Sei $g(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi inx}$ die zu f gehörige Fourierreihe.

   Schreiben Sie diese in der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cos(2\pi kx)$.

c) Zeichnen Sie die Funktion g auf $[-2, 2]$.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Es sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und der Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns und den Rang von A.

c) Geben Sie Sie eine Basis des Bildes der Abbildung $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ an.