**Aufgabe 1** (*11 Punkte*) Gegeben ist der Körper $K$ mit der Parametrisierung

$$K: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,2]\,,\ \varphi \in [0,\pi/2]\,,\ \vartheta \in [0,\pi/6]\,.$$

**a)** Berechnen Sie $\left|\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)\right|$ sowie das Volumen von $K$.

**b)** Berechnen Sie den Fluss $\int\limits_O F(x)\cdot n(x)\,ds_x$ des Vektorfeldes

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche $O$ des Körpers $K$ nach außen.

Hinweis: $\sin(\pi/6) = 1/2\,,\ \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2\,.$

---

**a)** Funktionaldeterminante (Kugelkoordinaten):

$$\left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)\right| = \left|\begin{matrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{matrix}\right| = r^2\cos\vartheta$$

$$V = \int\limits_K 1\,dx = \int\limits_0^2 r^2\,dr \int\limits_0^{\pi/2} 1\,d\varphi \int\limits_0^{\pi/6} \cos\vartheta\,d\vartheta = \left[r^3/3\right]_0^2\ [\varphi]_0^{\pi/2}\ [\sin\vartheta]_0^{\pi/6} = \frac{8}{3}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

**b)** Mit dem Satz von Gauß ist der Fluss gleich dem Volumenintegral über div$F$

$$\operatorname{div} F = 0 + 0 + 2x_3 = 2x_3\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int\limits_O F(x)\cdot n(x)\,ds_x &= \int\limits_K 2x_3\,dx \\ &= 2\int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/6} r\sin\vartheta\ r^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr \\ &= 2\int\limits_0^2 r^3\,dr \int\limits_0^{\pi/2} 1\,d\varphi \int\limits_0^{\pi/6} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta \\ &= 2\left[r^4/4\right]_0^2\ [\varphi]_0^{\pi/2}\ \frac{1}{2}\left[\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/6} = 2\,\frac{16}{4}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (*11 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils die Lösung $y(x)$ der folgenden Anfangswertprobleme.

**a)** $y'(x) = 9x^2 \dfrac{\ln(x)}{y(x)}$, $\quad y(1) = -1$

**b)** $y'(x) = y(x) - xe^{2x}$, $\quad y(0) = 0$

**c)** $3\big(y(x)\big)^2 - 2x + \big(6xy(x)\big)y'(x) = 0$, $\quad y(1) = 2/\sqrt{3}$

---

**a)** Die separable Differentialgleichung lässt sich mit einer partiellen Integration lösen.

$$\begin{aligned}
\int y(x)y'(x)\,dx &= \int 9x^2\ln(x)\,dx \\
\int y\,dy &= \left[3x^3\ln(x)\right] - \int 3x^3\frac{1}{x}\,dx \\
\frac{1}{2}\big(y(x)\big)^2 + c_1 &= 3x^3\ln(x) - x^3 + c_2 \\
y(x) &= \pm\sqrt{6x^3\ln(x) - 2x^3 + c}
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert folgt

$$-1 = y(1) = -\sqrt{0-2+c} \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\sqrt{6x^3\ln(x) - 2x^3 + 3}\,.$$

**b)** Aus Vorlesung: Das lineare Anfangswertproblem

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)\,, \qquad y(x_0) = y_0$$

hat die Lösung

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(s)\,ds} + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_s^x a(t)\,dt}\,ds\,.$$

Hier also

$$\begin{aligned}
y(x) &= 0 + \int_0^x -se^{2s}e^{-\int_s^x -1\,dt}\,ds \\
&= \int_0^x -se^{2s}e^{x-s}\,ds = -e^x\int_0^x se^s\,ds = -e^x\left(\left[se^s\right]_0^x - \int_0^x e^s\,ds\right) \\
&= -e^x\left(xe^x - \left[e^x\right]_0^x\right) = -e^x\left(xe^x - e^x + 1\right) = (1-x)\,e^{2x} - e^x
\end{aligned}$$

**Alternative:** Das charakteristische Polynom der homogenen DGl $\lambda - 1$ führt auf die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = ce^x\,.$$

Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, wobei $p$ ein Polynom ersten Grades ist und $\lambda = 2$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es liegt also keine Resonanz vor, der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet:

$$y_p(x) = (a_1 + a_2 x)e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad y_p'(x) = (2a_1 + a_2 + 2a_2 x)e^{2x}$$

Einsetzen in die DGl führt auf

$$(2a_1 e^{2x} + a_2 + 2a_2 x)e^{2x} = (a_1 + a_2 x)e^{2x} - xe^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 1,\ a_2 = -1$$

und somit auf die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = (1-x)e^{2x} + ce^x\,.$$

Der Anfangswert liefert schließlich

$$0 = y(0) = 1 + c \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = (1-x)e^{2x} - e^x\,.$$

**c)** Zur Lösung der exakten DGl wird zum Vektorfeld $(3y^2 - 2x,\ 6xy)$ das Potential $\Phi(x,y) = 3xy^2 - x^2$ berechnet. Die Lösungen sind somit

$$\Phi(x,y) = c \qquad \Leftrightarrow \qquad 3xy^2 - x^2 = c \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2+c}{3x}}$$

und mit dem Anfangswert folgt

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = y(1) = \pm\sqrt{\frac{1+c}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{3x}}\,.$$

**Aufgabe 3** (*9 Punkte*)

**a)** Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y'(x) = Ay(x)$.

**b)** Ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem $u'(t) = Bu(t)$ besitzt die allgemeine reelle Lösung

$$u_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $u'(t) = Bu(t) + b(t)$ mit

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

**a)** Die Matrix $A$ hat das charakteristische Polynom

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)^2,$$

also die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Aus $(A - \lambda E)v = 0$ ergeben sich folgende lineare Gleichungssysteme für die Eigenvektoren.

$$\lambda_1 = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Eigenwert $\lambda_2$ muss also ein Hauptvektor bestimmt werden.

$$(A - \lambda E)h = v_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet das Fundamentalsystem $\left\{ e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

**b)** Die Variation der Konstanten führt auf das Gleichungssystem $W(t)c'(t) = b(t)$, also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -e^{-t} & -te^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & (t-1)e^{-t} & \cos(t)e^t \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \end{array}\right).$$

Eine Vertauschung der ersten beiden Zeilen ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} e^t & 0 & -e^{-t} & \cos(t)e^t \\ 0 & -e^{-t} & -te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ \hline e^t & 0 & 0 & \cos(t)e^t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

mit der Lösung $c_1'(t) = \cos(t)$, $c_2'(t) = c_3'(t) = 0$. Somit ist

$$u_p(t) = \sin(t)e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung und die allgemeine reelle Lösung ist

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 + \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ -1+t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4** (*10 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^2, \qquad -1 < x \leq 1\,,$$

die 2-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

**a)** Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von $f$.

**b)** Geben Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe von $f$ an.

**c)** Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe der Ableitung von $f$. Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe von $f'$ im Punkt $x_0 = 1$?

**d)** Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourier-Reihe von $f$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\,.$$

---

**a)** $f$ ist eine gerade Funktion, somit ist

$$\begin{aligned}
b_n &= 0 \\
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} 2x^2\cos(\pi n x)\,dx = \left[\frac{2}{\pi n}x^2\sin(\pi n x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{4}{\pi n}x\sin(\pi n x)\,dx \\
&= -\left[-\frac{4}{\pi^2 n^2}x\cos(\pi n x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x)\,dx \\
&= \frac{8}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \left[\frac{4}{\pi^3 n^3}\sin(\pi n x)\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{\pi^2 n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

**b)** Für die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe gilt

$$c_0 = a_0 = \frac{2}{3}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n = c_{-n}\,.$$

**c)** Die Ableitung von $F(x) = a_0 + \sum a_n\cos(\pi n x)$ lautet

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin(\pi n x)$$

und im Punkt $x_0 = 1$ gilt

$$F'(1) = \frac{f'(1+) + f'(1-)}{2} = \frac{4-4}{2} = 0\,.$$

**d)** Das Einsetzen von $x = 1$ führt zu

$$2 = f(1) = F(1) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2 n^2}(-1)^n\cos(\pi n) \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

**Aufgabe 5** (*11 Punkte*)

**a)** Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\partial_{xx}u(x,y)+\partial_{yy}u(x,y)&=0\,,\quad 0\le x\le\pi\,,\,0\le y\le 1\,,\\ u(0,y)=u(\pi,y)&=0\,,\\ u(x,0)&=0\,,\\ u(x,1)&=7\sin(3x)-3\sin(7x)\,.\end{aligned}$$

**b)** Verwenden Sie **a)** zur Bestimmung der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\partial_{xx}v(x,y)+\partial_{yy}v(x,y)&=0\,,\quad 0\le x\le\pi\,,\,0\le y\le 1\,,\\ v(0,y)=v(\pi,y)&=y\,,\\ v(x,0)&=0\,,\\ v(x,1)&=1+7\sin(3x)-3\sin(7x)\,.\end{aligned}$$

---

**a)** Separationsansatz $u(x,y)=f(x)g(y)$ ergibt

$$u_{xx}=f''g=-u_{yy}=-fg''\Rightarrow\frac{f''}{f}=-\frac{g''}{g}=c$$

Für $f(x)$ ist die Gleichung $f''(x)=cf(x)$ zu lösen und die Randbedingungen $u(0,y)=u(\pi,y)=0$ lassen als nichttriviale Lösungen nur $f_k(x)=\sin(kx)$ für $c_k=-k^2$ zu.

Für diese $c_k$ hat die zweite Gleichung $g''(y)=k^2g(y)$ die Lösung $g(y)=d_1e^{ky}+d_2e^{-ky}$ und die Randbedingung $u(x,0)=0$ fordert $d_2=-d_1$ .

Durch Superposition erhält man also

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sinh(ky)\sin(kx)$$

Um die letzte Randbedingung $u(x,1)=7\sin(3x)-3\sin(7x)$ zu erfüllen muss $b_3=7/\sinh(3)$ und $b_7=-3/\sinh(7)$ sein und $b_k=0$ für alle anderen $k$.

Damit ist die Lösung:

$$u(x,y)=\frac{7}{\sinh(3)}\sinh(3y)\sin(3x)-\frac{3}{\sinh(7)}\sinh(7y)\sin(7x)\,.$$

**b)** Setze $v=u+w$ wobei $w(x,y)$ die Randbedingungen für $x=0$ und $x=\pi$ erfüllt, also $w(x,y)=y$

und damit ergibt sich als neue Gleichung

$$
\begin{aligned}
\partial_{xx}u(x,y) + \partial_{yy}u(x,y) = 0\,, &\quad 0 \le x \le \pi\,,\ 0 \le y \le 1\,,\\
u(0,y) &= v(0,y) - w(0,y) = y - y = 0\\
u(\pi,y) &= v(\pi,y) - w(\pi,y) = y - y = 0\\
u(x,0) &= v(x,0) - w(x,0) = 0 - 0 = 0\,,\\
u(x,1) &= v(x,1) - w(x,1) = 1 + 7\sin(3x) - 3\sin(7x) - 1 = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,.
\end{aligned}
$$

Dies ist das Randwertproblem aus **a)** und durch Addition von $w(x,y) = y$ ist also

$$v(x,y) = y + \frac{7}{\sinh(3)}\sinh(3y)\sin(3x) - \frac{3}{\sinh(7)}\sinh(7y)\sin(7x)\,.$$

**Aufgabe 6** (*8 Punkte*) Der Graph der Funktion $y = f(x) = 1 + x^2\,,\ x \in [0,1]$, schließt zusammen mit den Geraden $x = 0\,,\ x = 1$ und $y = 0$ eine Fläche $A$ ein.

**a)** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche $A$.

**b)** Berechnen Sie den Schwerpunkt $S$ der Fläche $A$.

**c)** Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K$, der entsteht, wenn die Fläche $A$ um die $x$-Achse rotiert.

---

**a)**

$$|A| = \int_0^1 1 + x^2\,dx = 1 + \frac{1}{3} = 4/3\,.$$

**b)**

$$\begin{aligned} |A|S_x &= \int_0^1 x + x^3\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 3/4 \\ \Rightarrow S_x &= 9/16\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A|S_y &= \int_0^1 \int_0^{1+x^2} y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 1 + 2x^2 + x^4\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = 14/15 \\ \Rightarrow S_y &= 7/10\,. \end{aligned}$$

**c)** Guldinsche Regel : $V = 2\pi|A|S_y = 28\pi/15\,.$