

Aufgabe 1 (11 Punkte) Gegeben ist der Körper K mit der Parametrisierung

$$K : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 2], \varphi \in [0, \pi/2], \vartheta \in [0, \pi/6].$$

- a) Berechnen Sie $\left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) \right|$ sowie das Volumen von K .
- b) Berechnen Sie den Fluss $\int_O F(x) \cdot n(x) ds_x$ des Vektorfeldes

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche O des Körpers K nach außen.

Hinweis: $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

- a) Funktionaldeterminante (Kugelkoordinaten):

$$\left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = r^2 \cos \vartheta$$

$$V = \int_K 1 dx = \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\pi/2} 1 d\varphi \int_0^{\pi/6} \cos \vartheta d\vartheta = [r^3/3]_0^2 [\varphi]_0^{\pi/2} [\sin \vartheta]_0^{\pi/6} = \frac{8}{3} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

- b) Mit dem Satz von Gauß ist der Fluss gleich dem Volumenintegral über $\operatorname{div} F$

$$\operatorname{div} F = 0 + 0 + 2x_3 = 2x_3.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_O F(x) \cdot n(x) ds_x &= \int_K 2x_3 dx \\ &= 2 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} r \sin \vartheta r^2 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi dr \\ &= 2 \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\pi/2} 1 d\varphi \int_0^{\pi/6} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \\ &= 2 [r^4/4]_0^2 [\varphi]_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [\sin^2 \vartheta]_0^{\pi/6} = 2 \frac{16}{4} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (11 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die Lösung $y(x)$ der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = 9x^2 \frac{\ln(x)}{y(x)}, \quad y(1) = -1$

b) $y'(x) = y(x) - xe^{2x}, \quad y(0) = 0$

c) $3(y(x))^2 - 2x + (6xy(x))y'(x) = 0, \quad y(1) = 2/\sqrt{3}$

a) Die separable Differentialgleichung lässt sich mit einer partiellen Integration lösen.

$$\begin{aligned} \int y(x)y'(x) dx &= \int 9x^2 \ln(x) dx \\ \int y dy &= [3x^3 \ln(x)] - \int 3x^3 \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2}(y(x))^2 + c_1 &= 3x^3 \ln(x) - x^3 + c_2 \\ y(x) &= \pm \sqrt{6x^3 \ln(x) - 2x^3 + c} \end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert folgt

$$-1 = y(1) = -\sqrt{0 - 2 + c} \Rightarrow c = 3 \Rightarrow y(x) = -\sqrt{6x^3 \ln(x) - 2x^3 + 3}.$$

b) Aus Vorlesung: Das lineare Anfangswertproblem

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

hat die Lösung

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} + \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_s^x a(t) dt} ds.$$

Hier also

$$\begin{aligned} y(x) &= 0 + \int_0^x -se^{2s} e^{-\int_s^x -1 dt} ds \\ &= \int_0^x -se^{2s} e^{x-s} ds = -e^x \int_0^x se^s ds = -e^x \left([se^s]_0^x - \int_0^x e^s ds \right) \\ &= -e^x (xe^x - [e^x]_0^x) = -e^x (xe^x - e^x + 1) = (1-x)e^{2x} - e^x \end{aligned}$$

Alternative: Das charakteristische Polynom der homogenen DGL $\lambda - 1$ führt auf die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = ce^x.$$

Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, wobei p ein Polynom ersten Grades ist und $\lambda = 2$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es liegt also keine Resonanz vor, der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet:

$$y_p(x) = (a_1 + a_2x)e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y_p'(x) = (2a_1 + a_2 + 2a_2x)e^{2x}$$

Einsetzen in die DGI führt auf

$$(2a_1e^{2x} + a_2 + 2a_2x)e^{2x} = (a_1 + a_2x)e^{2x} - xe^{2x} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1, a_2 = -1$$

und somit auf die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = (1 - x)e^{2x} + ce^x.$$

Der Anfangswert liefert schließlich

$$0 = y(0) = 1 + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = (1 - x)e^{2x} - e^x.$$

- c) Zur Lösung der exakten DGI wird zum Vektorfeld $(3y^2 - 2x, 6xy)$ das Potential $\Phi(x, y) = 3xy^2 - x^2$ berechnet. Die Lösungen sind somit

$$\Phi(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad 3xy^2 - x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \pm \sqrt{\frac{x^2 + c}{3x}}$$

und mit dem Anfangswert folgt

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = y(1) = \pm \sqrt{\frac{1 + c}{3}} \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{3x}}.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y'(x) = Ay(x)$.

b) Ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem $u'(t) = Bu(t)$ besitzt die allgemeine reelle Lösung

$$u_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $u'(t) = Bu(t) + b(t)$ mit

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda)^2,$$

also die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Aus $(A - \lambda E)v = 0$ ergeben sich folgende lineare Gleichungssysteme für die Eigenvektoren.

$$\lambda_1 = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Eigenwert λ_2 muss also ein Hauptvektor bestimmt werden.

$$(A - \lambda E)h = v_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet das Fundamentalsystem $\left\{ e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Die Variation der Konstanten führt auf das Gleichungssystem $W(t)c'(t) = b(t)$, also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -e^{-t} & -te^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & (t-1)e^{-t} & \cos(t)e^t \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \end{array} \right).$$

Eine Vertauschung der ersten beiden Zeilen ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} e^t & 0 & -e^{-t} & \cos(t)e^t \\ 0 & -e^{-t} & -te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ \hline e^t & 0 & 0 & \cos(t)e^t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

mit der Lösung $c'_1(t) = \cos(t)$, $c'_2(t) = c'_3(t) = 0$. Somit ist

$$u_p(t) = \sin(t)e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung und die allgemeine reelle Lösung ist

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 + \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ -1+t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^2, \quad -1 < x \leq 1,$$

die 2-periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt wird.

- Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von f .
- Geben Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe von f an.
- Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe der Ableitung von f . Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe von f' im Punkt $x_0 = 1$?
- Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourier-Reihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}.$$

a) f ist eine gerade Funktion, somit ist

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \\ a_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 2x^2 \cos(\pi n x) dx = \left[\frac{2}{\pi n} x^2 \sin(\pi n x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{4}{\pi n} x \sin(\pi n x) dx \\ &= - \left[-\frac{4}{\pi^2 n^2} x \cos(\pi n x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x) dx \\ &= \frac{8}{\pi^2 n^2} (-1)^n - \left[\frac{4}{\pi^3 n^3} \sin(\pi n x) \right]_{-1}^1 = \frac{8}{\pi^2 n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

b) Für die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe gilt

$$c_0 = a_0 = \frac{2}{3}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{4}{\pi^2 n^2} (-1)^n = c_{-n}.$$

c) Die Ableitung von $F(x) = a_0 + \sum a_n \cos(\pi n x)$ lautet

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(\pi n x)$$

und im Punkt $x_0 = 1$ gilt

$$F'(1) = \frac{f'(1+) + f'(1-)}{2} = \frac{4 - 4}{2} = 0.$$

d) Das Einsetzen von $x = 1$ führt zu

$$2 = f(1) = F(1) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} (-1)^n \cos(\pi n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(x, 1) &= 7 \sin(3x) - 3 \sin(7x).\end{aligned}$$

b) Verwenden Sie a) zur Bestimmung der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\partial_{xx}v(x, y) + \partial_{yy}v(x, y) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1, \\ v(0, y) &= v(\pi, y) = y, \\ v(x, 0) &= 0, \\ v(x, 1) &= 1 + 7 \sin(3x) - 3 \sin(7x).\end{aligned}$$

a) Separationsansatz $u(x, y) = f(x)g(y)$ ergibt

$$u_{xx} = f''g = -u_{yy} = -fg'' \Rightarrow \frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = c$$

Für $f(x)$ ist die Gleichung $f''(x) = cf(x)$ zu lösen und die Randbedingungen $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ lassen als nichttriviale Lösungen nur $f_k(x) = \sin(kx)$ für $c_k = -k^2$ zu.

Für diese c_k hat die zweite Gleichung $g''(y) = k^2g(y)$ die Lösung $g(y) = d_1e^{ky} + d_2e^{-ky}$ und die Randbedingung $u(x, 0) = 0$ fordert $d_2 = -d_1$.

Durch Superposition erhält man also

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(ky) \sin(kx)$$

Um die letzte Randbedingung $u(x, 1) = 7 \sin(3x) - 3 \sin(7x)$ zu erfüllen muss $b_3 = 7/\sinh(3)$ und $b_7 = -3/\sinh(7)$ sein und $b_k = 0$ für alle anderen k .

Damit ist die Lösung:

$$u(x, y) = \frac{7}{\sinh(3)} \sinh(3y) \sin(3x) - \frac{3}{\sinh(7)} \sinh(7y) \sin(7x).$$

b) Setze $v = u+w$ wobei $w(x, y)$ die Randbedingungen für $x = 0$ und $x = \pi$ erfüllt, also $w(x, y) = y$

und damit ergibt sich als neue Gleichung

$$\partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(0, y) = v(0, y) - w(0, y) = y - y = 0$$

$$u(\pi, y) = v(\pi, y) - w(\pi, y) = y - y = 0$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) - w(x, 0) = 0 - 0 = 0,$$

$$u(x, 1) = v(x, 1) - w(x, 1) = 1 + 7 \sin(3x) - 3 \sin(7x) - 1 = 7 \sin(3x) - 3 \sin(7x).$$

Dies ist das Randwertproblem aus **a)** und durch Addition von $w(x, y) = y$ ist also

$$v(x, y) = y + \frac{7}{\sinh(3)} \sinh(3y) \sin(3x) - \frac{3}{\sinh(7)} \sinh(7y) \sin(7x).$$

Aufgabe 6 (8 Punkte) Ein Zufallsexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/50$ werde 100 mal wiederholt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für höchstens 2 Erfolge

- a) mit Hilfe der Binomialverteilung,
(Hinweis: Als Ergebnis genügt eine Formel, die man mit dem Taschenrechner auswerten kann)
- b) näherungsweise mit Hilfe der Poisson-Verteilung,
- c) näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung.
-

- a) k Erfolge bei n Wiederholungen eines Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p haben nach der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit

$$p(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens zwei Erfolge

$$\begin{aligned} p(\{0, 1, 2\}) &= p(\{0\}) + p(\{1\}) + p(\{2\}) \\ &= \left(\frac{49}{50}\right)^{98} \left(\left(\frac{49}{50}\right)^2 + 100 \cdot \frac{1}{50} \frac{49}{50} + \frac{100 \cdot 99}{2} \left(\frac{1}{50}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

- b) Für die Näherung ist die Poisson-Verteilung mit $\lambda = np = 2$ zu verwenden. Hier ist $p(\{k\}) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ und somit

$$p_{\text{Poisson}}(\{0, 1, 2\}) = e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) = 5e^{-2}$$

- c) Für die Näherung ist die Normalverteilung mit $\mu = np = 2$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 7/5$ zu verwenden. Hier ist

$$p_{\text{Normal}}(\{k \leq 2\}) = \Phi\left(\frac{2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$