Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In allen Aufgaben sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 20. 04. 2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich vom 20. 04. bis 29. 04. 2009 bei Frau Bock (Zimmer V57-7.129) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*9 Punkte*) Gegeben sind das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} .$$

und die Fläche

$$S : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2v^2 \end{pmatrix} , \quad u \in [0,1] \, , \, v \in [0,1]$$

mit der Randkurve C, die die Punkte $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,1)$ und $(0,1,0)$ in der angegebenen Reihenfolge durchläuft.

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_C F(x) \cdot dx \, .$$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = f(x) \, .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = 0$ sowie die spezielle Lösung, für die $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ gilt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = 2e^{-x}$.

Aufgabe 3 (*9 Punkte*) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 25\cos(2t) \, , \quad u(0) = -3 \, , \, u'(0) = 8 \, .$$

a) Geben Sie die Gleichung an, in die das Anfangswertproblem durch Laplace-Transformation $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ übergeht, und lösen Sie diese nach $U(s)$ auf.

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.

Hinweise:

$$(8-3s)(s+1)^2 = -3s^3 + 2s^2 + 13s + 8$$

$$\mathcal{L}\left(\cos(\alpha t)\right)(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\sin(\alpha t)\right)(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$t\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(t,x) - 2x\frac{\partial}{\partial x}\,u(t,x) = -2x$$

mit den Anfangswerten $u(1,x) = 2x$.

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung.

b) Geben Sie die Charakteristik zum Punkt $(1,a)$ an.

c) Geben Sie die gewöhnliche Differentialgleichung und die zugehörige Anfangsbedingung an, die die Lösung der partiellen Differentialgleichung auf der Charakteristik aus **b)** erfüllt. Bestimmen Sie die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung.

d) Geben Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangswerten an.

Aufgabe 5 (*13 Punkte*) In einer Urne liegen drei von 1 bis 3 durchnummerierte Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X messe die Summe der Nummern der gezogenen Kugeln.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten. Testen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ausrechnen.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\{X=6\}|\{X\geq 6\})$.

d) Sind die Ereignisse $\{X \geq 5\}$ und $\{X \leq 7\}$ stochastisch unabhängig?

Aufgabe 6 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{für } x \in (0,2)\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

a) Bestimmen Sie $\alpha > 0$ so, dass f die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ ist, und berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer reellwertigen Zufallsvariablen X mit der Verteilung aus **a)**.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{X > 1\})$ und finden Sie ein $\beta \in [1,2]$ so, dass die Ereignisse $\{X > 1\}$ und $\{X \leq \beta\}$ stochastisch unabhängig sind.
