Aufgabe 1 (*9 Punkte*) Gegeben sind das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} .$$

und die Fläche

$$S : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2v^2 \end{pmatrix} , \quad u \in [0,1] \, , \, v \in [0,1]$$

mit der Randkurve C, die die Punkte $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,1)$ und $(0,1,0)$ in der angegebenen Reihenfolge durchläuft.

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_C F(x) \cdot dx \, .$$

- Möglichkeit 1 (Stokes):

$$(\operatorname{rot} F)(x) = \begin{pmatrix} x_1 & - & -x_1 \\ x_2 & - & x_2 \\ -x_3 & - & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ -2x_3 \end{pmatrix} .$$

Satz von Stokes:

$$\int_C F(x) \cdot dx = \int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, ds_x$$

Normalenvektor (nicht normiert, positive x_3-Richtung):

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2uv^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2u^2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - & 2uv^2 \\ 0 & - & 2u^2v \\ 1 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2uv^2 \\ -2u^2v \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Fluss:

$$\int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 2u \\ 0 \\ -2u^2v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2uv^2 \\ -2u^2v \\ 1 \end{pmatrix} du \, dv = \int_0^1 \int_0^1 -4u^2v^2 - 2u^2v^2 \, du \, dv = -6 \, \frac{1}{3} \, \frac{1}{3} = -2/3 \, .$$

- Möglichkeit 2 (direkt, 4 Teilwege)

$$C_1 : (t, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \, dt = 0\,,$$

$$C_2 : (1, t, t^2) \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 \, dt = 1/3\,,$$

$$C_3 : (t, 1, t^2) \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t^2 \, dt = 1\,,$$

$$C_4 : (0, t, 0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \, dt = 0\,.$$

C_3 rückwärts durchlaufen, also Arbeitsintegral: $1/3 - 1 = -2/3$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = f(x)\,.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = 0$ sowie die spezielle Lösung, für die $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ gilt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = 2e^{-x}$.

---

a) Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2/3} = -1\,,$$

somit ergibt sich die Lösung zu

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}\,.$$

Die Ableitungen an den Anfangswerten

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \quad && y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\
y_h'(x) = (-c_2 + c_3)e^{-x} - c_3 x e^{-x} & \Rightarrow \quad && y'(0) = -c_2 + c_3 = 0 \\
y_h''(x) = (c_2 - 2c_3)e^{-x} + c_3 x e^{-x} & \Rightarrow \quad && y''(0) = c_2 - 2c_3 = -1
\end{aligned}$$

führen auf

$$c_1 = 0\,, \qquad c_2 = 1\,, \qquad c_3 = 1$$

und somit auf die spezielle Lösung

$$y(x) = (1+x)e^{-x}\,.$$

b) Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, wobei p ein Polynom vom Grade Null ist und $\lambda = -1$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es liegt also Resonanz vor, der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet:

$$y_p(x) = ax^2 e^{-x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit Hilfe der Operatorenmethode:

$$\begin{aligned}
D(D+E)^2 a x^2 e^{-x} &= 2e^{-x} \\
e^{-x}(D-E)D^2 a x^2 &= 2e^{-x} \\
(D^3 - D^2)ax^2 &= 2 \\
-2a &= 2
\end{aligned}$$

also $a = -1$ und somit die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} - x^2 e^{-x}\,.$$

Alternative: Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, wobei p ein Polynom vom Grade Null ist und $\lambda = -1$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es liegt also Resonanz vor, der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= ax^2 e^{-x} \\
y_p'(x) &= a(2x - x^2)e^{-x} \\
y_p''(x) &= a(2 - 4x + x^2)e^{-x} \\
y_p'''(x) &= a(-6 + 6x - x^2)e^{-x}
\end{aligned}$$

In die DGl eingesetzt folgt

$$a\big((-6 + 6x - x^2) + 2(2 - 4x + x^2) + (2x - x^2)\big)e^{-x} = a\big(-2\big)e^{-x} = f(x) = 2e^{-x}\,,$$

also $a = -1$ und somit die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} - x^2 e^{-x}\,.$$

Aufgabe 3 (*9 Punkte*) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 25\cos(2t)\,, \quad u(0) = -3\,,\ u'(0) = 8\,.$$

a) Geben Sie die Gleichung an, in die das Anfangswertproblem durch Laplace-Transformation $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ übergeht, und lösen Sie diese nach $U(s)$ auf.

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.

Hinweise:

$$(8-3s)(s+1)^2 = -3s^3 + 2s^2 + 13s + 8$$

$$\mathcal{L}\left(\cos(\alpha t)\right)(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\sin(\alpha t)\right)(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

---

a)

$$\begin{aligned}
f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{25s}{s^2+2^2} \\
u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) \\
u'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0) = sU(s) + 3 \\
u''(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s) + 3s - 8
\end{aligned}$$

Transformierte Gleichung:

$$s^2U(s) + 3s - 8 + 2sU(s) + 6 + U(s) = \frac{25s}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned}
s^2U(s) + 3s - 8 + 2sU(s) + 6 + U(s) &= (s^2+2s+1)U(s) + 3s - 2 = \frac{25s}{s^2+4} \\
\Rightarrow \quad U(s) &= \frac{25s + (2-3s)(s^2+4)}{(s^2+4)(s+1)^2} = \frac{-3s^3+2s^2+13s+8}{(s^2+4)(s+1)^2} \\
&= \frac{8-3s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

b)

$$U(s) = \frac{8-3s}{s^2+4} = -3\,\frac{s}{s^2+2^2} + 4\,\frac{2}{s^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -3\cos(2t) + 4\sin(2t)$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$t\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(t,x) - 2x\frac{\partial}{\partial x}\,u(t,x) = -2x$$

mit den Anfangswerten $u(1,x) = 2x$.

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung.

b) Geben Sie die Charakteristik zum Punkt $(1,a)$ an.

c) Geben Sie die gewöhnliche Differentialgleichung und die zugehörige Anfangsbedingung an, die die Lösung der partiellen Differentialgleichung auf der Charakteristik aus **b)** erfüllt. Bestimmen Sie die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung.

d) Geben Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangswerten an.

---

a)

$$t'(s) = t(s) \quad \Rightarrow \quad t(s) = c_1 e^s\,, \qquad x'(s) = -2x(s) \quad \Rightarrow \quad x(s) = c_2 e^{-2s}$$

b) Charakteristik zum Punkt $(1,a)$:

$$t(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1\,, \qquad x(0) = a \quad \Rightarrow \quad c_2 = a\,.$$

also

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} e^s \\ ae^{-2s} \end{pmatrix}.$$

c)

$$p'(s) = -2x(s) = -2ae^{-2s}\,, \quad p(0) = 2a \quad \Rightarrow \quad p(s) = ae^{-2s} + a$$

d)

$$t = e^s\,,\ a = xe^{2s} = xt^2 \quad \Rightarrow \quad u(t,x) = xe^{-2s}e^{2s} + xt^2 = (1+t^2)x$$

Aufgabe 5 (*13 Punkte*) In einer Urne liegen drei von 1 bis 3 durchnummerierte Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X messe die Summe der Nummern der gezogenen Kugeln.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten. Testen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ausrechnen.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\{X=6\}|\{X\geq 6\})$.

d) Sind die Ereignisse $\{X\geq 5\}$ und $\{X\leq 7\}$ stochastisch unabhängig?

---

a) Es werden die sortierten Ergebnisse betrachtet und die möglichen Permutationen berücksichtigt.

- Summe 3: (1,1,1) – Eine Möglichkeit, eine Permutation $\to 1/27$
- Summe 4: (1,1,2) – Eine Möglichkeit, drei Permutationen $\to 3/27 = 1/9$
- Summe 5: (1,1,3), (1,2,2) – Zwei Möglichkeiten, je drei Permutationen $\to 6/27 = 2/9$
- Summe 6: (1,2,3), (2,2,2) – Zwei Möglichkeiten, erste 6 Permutationen, zweite eine Permutation $\to (6+1)/27 = 7/27$
- Summe 7: (1,3,3), (2,2,3) – Zwei Möglichkeiten, je drei Permutationen $\to 6/27 = 2/9$
- Summe 8: (2,3,3) – Eine Möglichkeit, drei Permutationen $\to 3/27 = 1/9$
- Summe 9: (3,3,3) – Eine Möglichkeit, eine Permutation $\to 1/27$

Probe: $1+3+6+7+6+3+1=27$

b) Erwartungswert: Die drei Ziehungen sind unabhängig, daher ist der Erwartungswert der Summe gleich der Summe der Erwartungswerte also

$$E(X) = 3\sum_{k=1}^{3} k/3 = 3\cdot 2 = 6$$

Direkte Berechnung

$$E(X) = \sum_{s=3}^{9} s\,p(s) = \frac{3+12+30+42+42+24+9}{27} = 162/27 = 6\,.$$

Varianz:

$$\begin{aligned} V &= E((X-E(X))^2) \\ &= \frac{(3-6)^2\cdot 1+(4-6)^2\cdot 3+(5-6)^2\cdot 6+(6-6)^2\cdot 7+(7-6)^2\cdot 6+(8-6)^2\cdot 3+(9-6)^2\cdot 1}{27} \\ &= \frac{2(3^2\cdot 1+2^2\cdot 3+1^2\cdot 6)}{27} = 2\,. \end{aligned}$$

c)

$$P(\{X=6\}|\{X \geq 6\}) = \frac{p(6)}{p(6)+p(7)+p(8)+p(9)} = \frac{7}{17}\,.$$

d)

$$\begin{aligned} p(X \geq 5) &= p(5)+p(6)+p(7)+p(8)+p(9) = \frac{23}{27}\,, \\ p(X \leq 7) &= p(3)+p(4)+p(5)+p(6)+p(7) = \frac{23}{27}\,, \\ p(5 \leq X \leq 7) &= p(5)+p(6)+p(7) = \frac{19}{27}\,. \end{aligned}$$

Da $23^2 \neq 19 \cdot 27 = 23^2 - 4^2$ sind die Ereignisse nicht unabhängig.

Aufgabe 6 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{für } x \in (0,2)\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

a) Bestimmen Sie $\alpha > 0$ so, dass f die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ ist, und berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer reellwertigen Zufallsvariablen X mit der Verteilung aus **a)**.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{X > 1\})$ und finden Sie ein $\beta \in [1,2]$ so, dass die Ereignisse $\{X > 1\}$ und $\{X \leq \beta\}$ stochastisch unabhängig sind.

---

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 \alpha x\,dx = 2\alpha \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1/2\,.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x^2/4 & ,0 \leq x \leq 2 \\ 1 & ,x > 2 \end{cases}$$

b)

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}\,dx = 4/3\,.$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 16/9 = 2/9\,.$$

c)

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$P(X \leq \beta) = \beta^2/4$$

$$P(1 < X \leq \beta) = \beta^2/4 - 1/4$$

Stochastisch unabhängig:

$$\beta^2/4 - 1/4 \overset{!}{=} \frac{\beta^2}{4}\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 4\beta^2 - 4 = 3\beta^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2$$