Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 23.01.2009, 14.00 – 16.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären
$400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 20 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis
“`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS08/`”.

c) Einige Werte trigonometrischer Funktionen:
$\sin(k\pi) = 0,\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2},\ \sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$.

Aufgabe 1 **13 Punkte**

Für welche(n) Wert(e) des Parameters p besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} -x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & =3 \\ 2\,x_1 & +(p-1)\,x_2 & +(p+3)\,x_3 & =1-p \\ 4\,x_1 & -3\,x_2 & +(p+1)\,x_3 & =15 \end{array}$$

i) eine (i.a. von p abhängige) eindeutige Lösung,

ii) mehr als eine Lösung,

iii) keine Lösung?

Bestimmen Sie im Fall **ii)** die Lösungsmenge (oder die allgemeine Lösung) des obigen linearen Geichungssystems.

Bestimmen Sie für $p = 1$ die Lösung des obigen linearen Geichungssystems.

Teilweise verwendbare *Rechenergebnisse* (zur Vereinfachung der Zahlenrechnung) :
$\sqrt{11^2 + 26 \cdot 4} = 15$, $5 \cdot 27 = 135$, $18 \cdot 27 = 486$, $13 \cdot 36 = 468$ und $3 \cdot 27 = 81$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & -1 & 13 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Die Abhängigkeit der Nachfrage einer Ware vom Preis p sei durch $N(p) := 9 - 3\,p$ beschrieben. In welchem Intervall ist die Nachfrage positiv? In welchem Teilintervall davon reagiert die Nachfrage elastisch, d.h. in welchem Teilintervall gilt $|\varepsilon_N(p)| > 1$?

– bitte wenden –

Aufgabe 4 **9 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei auch ∞ als Grenzwert zugelassen ist):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x) - \pi + \pi x}{3x^2 - 6x + 3}, \qquad \lim_{x\to\infty} (x-2)^{-1} \cdot \ln(e^x - 2), \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\ln x}.$$

Aufgabe 5 **11 Punkte**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) := 3x^2y + 3x^2 + 6y^2$ auf relative Extrema einschließlich der Klärung, ob es sich um ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum handelt.

Aufgabe 6 **17 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = e^{y(x)} \cdot \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 8 \cdot \sin x\,.$$

Aufgabe 7 **10 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differenzengleichung:

$$y_{n+2} - \sqrt{2} \cdot y_{n+1} + y_n = 2 \cdot 3^n\,.$$

Aufgabe 8 **10 Punkte**

Gegeben seien die Ebene

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Gerade

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie ...

a) ... die Gleichungsdarstellung der Ebene E.

b) ... den Winkel α zwischen der Ebene E und der Geraden g.

c) ... den gemeinsamen Punkt der Geraden g und der Ebene E.