Statistik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 09.01.2009, 14.00–16.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle 8 gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, a^x, $\sqrt{x}$) nötig wäre. Z.B. wären
$400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$ und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel:
12 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge),
Tabelle der Standardnormalverteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der χ^2–Verteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der t–Verteilung ohne zusätzliche Einträge.

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem file “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiS_Kolbe_SS08/`”.

Aufgabe 1 **5 Punkte**

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{-1+2\ln 2} \cdot \ln x & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariablen X. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Hinweis: Hilfsformel zur Bestimmung der Integrale: $\dfrac{d}{dx} x^{k+1} \left(\dfrac{\ln x}{k+1} - \dfrac{1}{(k+1)^2} \right) = x^k \ln x$

Aufgabe 2 **11 Punkte**

a) Die (in Laufleistung gemessene) Lebensdauer des Bremsbelages einer aus einer Produktion zufällig herausgegriffenen Scheibenbremse sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 150\ 000$(km) und Standardabweichung $\sigma = 10\ 000$(km). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Bremsbelag eine Lebensdauer von

a_1) mindestens 145 000 (km) hat.

a_2) höchstens 163 700 (km) hat.

b) Von 10 000 Reisenden, die an einem Wochenende mit der Bahn von Stuttgart nach Köln fahren benutzen 7 000 den ICE und 3 000 andere Züge. Von den 10 000 Reisenden werden zufällig 200 ausgewählt und befragt, wobei kein Reisender mehr als einmal ausgewählt wird. Bestimmen Sie näherungsweise (also nicht exakt) die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 130 von den ausgewählten Reisenden den ICE benutzen.
Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).
Hinweis: Verwenden Sie zur Vereinfachung der Zahlenrechnung eines der Rechenergebnisse: $10.5/\sqrt{42} = 1.62$ und $10.0/\sqrt{42} = 1.54$

Aufgabe 3 **7 Punkte**

Die gemeinsame Verteilung zweier ZV X und Y sei in der folgenden Tabelle vorgegeben:

$\downarrow X \vert Y \rightarrow$	-1	0	1
0	0.05	0.15	0.10
3	0.10	0.40	0.20

a) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y?

b) Kann man *aus dem Ergebnis von* **a)** schließen, ob die ZV X und Y unabhängig sind oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Die gemeinsame Verteilung zweier *unabhängiger* ZV X und Y und die Randverteilung sei in der folgenden Tabelle teilweise vorgegeben:

$\downarrow X \mid Y \rightarrow$	-2	0	1	
-3	$*$	$*$	$*$	$*$
0	$*$	0.25	$*$	0.50
3	$*$	$*$	0.04	$*$
	$*$	$*$	0.10	

Bestimmen Sie die noch fehlenden Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung und der Randverteilungen.

Aufgabe 5 **8 Punkte**

Eine Beobachtungsgröße sei $N(\mu, \sigma)$–verteilt, wobei μ und σ unbekannt seien. Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für μ in der Form $a \leq \mu \leq b$. Dazu stehen Ihnen folgende Ergebnisse der Auswertung einer Stichprobe vom Umfang $n = 16$ zur Verfügung:

$$\overline{x} = 31, \qquad \sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2 = 16 \cdot 60.$$

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Eine Messgröße sei $N(\mu, \sigma_0)$–verteilt, wobei $\sigma_0 = 2$ bekannt sei. Es soll die Hypothese $H_0 : \mu \leq 40.0$ gegen die Hypothese $H_1 : \mu \geq 40.1$ getestet werden, wobei eine irrtümliche Ablehnung von H_0 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.10$ und eine irrtümliche Ablehnung von H_1 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\beta = 0.05$ erfolgen soll. Zu welchem Testergebnis kommen Sie, wenn die Auswertung einer Stichprobe vom Umfang 16 einen Durchschnittswert

a) $\overline{x} = 39.5$,

b) $\overline{x} = 40.5$

ergibt?

Aufgabe 7 **8 Punkte**

Bei den 20 000 Studierenden einer Hochschule soll durch eine Umfrage festgestellt werden, wie viele Studierende neben ihrem Studium erwerbstätig sind. Bestimmen Sie dazu ein 95%–Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p dieser Studierenden, wenn bei einer Stichprobe von 400 Studierenden, die "ohne Zurücklegen" zufällig ausgewählt wird, 80 davon neben ihrem Studium erwerbstätig sind.

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind). Bei zwei zur Verfügung stehenden Näherungsformeln, genügt es, die **einfachere** (und gröbere) zu verwenden.

Aufgabe 8 **7 Punkte**

a) Die ZV X und Y können nur die Werte 1, 2 und 3 annehmen. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 10% die Hypothese H_0: X und Y sind unabhängig.

Dazu steht Ihnen das Resultat einer Stichprobe vom Umfang 400 in der folgenden Tabelle von absoluten Häufigkeiten und Randhäufigkeiten zur Verfügung:

$\downarrow X \vert Y \rightarrow$	1	2	3	$f_{i,*}$
1	45	25	30	100
2	50	20	30	100
3	95	48	57	200
$f_{*,j}$	190	93	117	400

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).

Benötigtes Rechenergebnis:

$$w = \frac{(400\cdot 45 - 100\cdot 190)^2}{400\cdot 100\cdot 190} + \frac{(400\cdot 25 - 100\cdot 93)^2}{400\cdot 100\cdot 93} + \frac{(400\cdot 30 - 100\cdot 117)^2}{400\cdot 100\cdot 117}$$
$$+\frac{(400\cdot 50 - 100\cdot 190)^2}{400\cdot 100\cdot 190} + \frac{(400\cdot 20 - 100\cdot 93)^2}{400\cdot 100\cdot 93} + \frac{(400\cdot 30 - 100\cdot 117)^2}{400\cdot 100\cdot 117}$$
$$+\frac{(400\cdot 95 - 200\cdot 190)^2}{400\cdot 200\cdot 190} + \frac{(400\cdot 48 - 200\cdot 93)^2}{400\cdot 200\cdot 93} + \frac{(400\cdot 57 - 200\cdot 117)^2}{400\cdot 200\cdot 117}$$
$$= 0.9745$$

b) Bei einem anderen Paar U und V von ZV liefert die Auswertung der Stichprobe $w = 0$ (statt $w = 0.9745$). Kann man daraus mit 90–prozentiger Sicherheit schließen, dass U und V unabhängig sind?