Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **aer, autip, geod, wewi**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: aer1 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch.
- In allen Aufgaben sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 19. 10. 2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19. 10.** bis **28. 10. 2009** mit Frau Bock (Zimmer V57-7.129) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*12 Punkte*) Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt des Körpers

$$K: \qquad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad z \geq 0\,, \quad x^2+y^2 \leq z^2\,, \quad x^2+y^2+z \leq 2\,.$$

Aufgabe 2 (*11 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$$

sowie die spezielle Lösung, für die $y(0) = 4$ und $y(1) = 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 8\sin(x)\,.$$

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2xy(x)e^{(x^2)} + \big(3 + y(x)\big)e^{(x^2)}y'(x) = 0\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die gegebene Differentialgleichung nicht exakt ist.

b) Bestimmen Sie einen nur von y abhängenden integrierenden Faktor λ für die gegebene Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die implizite Form der allgemeinen reellen Lösung der Differentialgleichung.

d) Bestimmen Sie die implizite Form der speziellen Lösung, welche $y(0) = 1$ erfüllt.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Gegeben sind die Funktionen

$$f_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,, \qquad f_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte und die Fouriertransformierte der Funktion f_1.

b) Ermitteln Sie die Fouriertransformierte der Funktion f_2, indem Sie die Fouriertransformierte von f_1 verwenden.

c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$g(x) := f_1(x) - f_2(x)\,,$$

indem Sie die Fouriertransformierten von f_1 und f_2 verwenden.

d) Ermitteln Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,1] \\ 2 - x & \text{für } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,,$$

indem Sie die Fouriertransformierte von g verwenden.

Aufgabe 5 (*11 Punkte*) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\, u(t,x) &= 2\partial_{xx}\, u(t,x) + 6u(t,x), \quad x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(t,0) &= u(t,\pi) \;=\; 0, \\ u(0,x) &= 0, \quad \partial_t\, u(0,x) \;=\; 8\sin(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

Wir betrachten folgendes Glücksspiel: In einer Urne liegen 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Der Spieler bekommt für jede gezogene schwarze Kugel 1 Euro und muss für jede gezogene weiße Kugel 2 Euro bezahlen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert des Gewinns.

b) Wie muss man den vom Spieler für eine weiße Kugel zu zahlenden Betrag anpassen, damit der Erwartungswert des Gewinns gleich 0 ist?
