# Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **Luft- und Raumfahrttechnik**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: aer2 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch.
- In allen Aufgaben sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 19. 10. 2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

---

**Aufgabe 1** (*11 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(\pi x_3) \\ x_3^2 \\ (x_1 - 2)(x_3 - 2)^3 \end{pmatrix}$$

und das Flächenstück

$$S: \; x_2 = 4 - x_1^2 \;, \; x_2 \geq 0 \;, \; 0 \leq x_3 \leq 2 \;,$$

mit Flächennormale $n(x)$ mit positiver $x_2$-Komponente. Skizzieren Sie $S$ und die zugehörige Randkurve $C$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F(x) \cdot n(x) ds_x \,.$$

---

**Aufgabe 2** (*10 Punkte*)

**a)** Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die allgemeine komplexe Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y'(x) = Ay(x)$.

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = Ay(x) + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

---

**Aufgabe 3** (*10 Punkte*) Die $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = e^{x/2} \qquad \text{für} \quad x \in [0, 2\pi)$$

gegeben.

**a)** Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe von $f$.

**b)** Geben Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von $f$ an.

**c)** Gegen welche Funktion konvergiert die reelle Fourier-Reihe der Funktion $f$?

**d)** Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourier-Reihe von $f$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4n^2}\,.$$

---

**Aufgabe 4** (*7 Punkte*)

Ermitteln Sie die Lösung $u(t, x)$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t u(t, x) + 2\partial_x u(t, x) + 3u(t, x) = 3t^2 + 2t$$

für die Anfangswerte $u(0, x) = e^{-2x}$.

---

**Aufgabe 5** (*12 Punkte*)

Eine Ampel stehe während der Zeitspanne $[0, r]$ auf „rot“ und während der Zeitpanne $(r, r + g]$ auf „grün“. Die Zufallsvariable $X$ messe den Zeitpunkt des Eintreffens eines Autos an der Ampel, sie sei auf $[0, r + g]$ gleichverteilt. Die Zufallsvariable $W$ messe die Wartezeit des Autos an der Ampel.

**a)** Drücken Sie $W$ in Abhängigkeit von $X$ aus.

**b)** Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $W$. Wie lautet das Ergebnis für $r = g$?

**c)** Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $W$ an.

---

**Aufgabe 6** (*10 Punkte*)

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} cx\, e^{-x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

**a)** Bestimmen Sie $c > 0$ so, dass $f$ die Dichte einer reellwertigen Zufallsvariablen $X$ ist.

**b)** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

**c)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{1 \leq X \leq 2\})$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\{X \geq 1\}|\{X \leq 2\})$.

---