**Aufgabe 1** (*11 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(\pi x_3) \\ x_3^2 \\ (x_1 - 2)(x_3 - 2)^3 \end{pmatrix}$$

und das Flächenstück

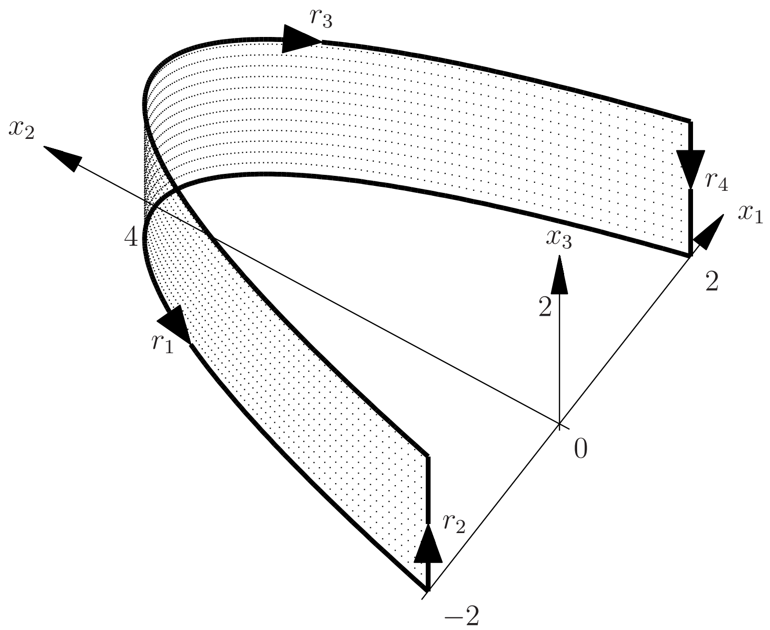
$$S: \ x_2 = 4 - x_1^2 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ 0 \leq x_3 \leq 2 \ ,$$

mit Flächennormale $n(x)$ mit positiver $x_2$-Komponente. Skizzieren Sie $S$ und die zugehörige Randkurve $C$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot n(x) ds_x \, .$$

---

$S$ ist Teil eines parabolischen Zylinders mit $x_3$-Richtung als Achse.




Mit Stokes ergeben sich die Arbeitsintegrale

$$\iint_S \operatorname{rot} F(x) \cdot n(x) ds_x = \int_C F(x) \cdot dx = \sum_{k=1}^{4} \int_t F(r_k(t)) \cdot r_k'(t) \, dt \, .$$

Die vier Teilstücke der Randkurve haben die Parametrisierungen (Orientierung beachten):

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 4 - t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad r_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - t^2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r_4(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

mit $t \in [-2,2]$ für $k \in \{1,3\}$ und $t \in [0,2]$ für $k \in \{2,4\}$.

Es ergibt sich für die Arbeitsintegrale

Weg $r_1$:

$$\int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0\,.$$

Weg $r_2$:

$$\int_{0}^{2} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ (-2-2)(t-2)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -4 \int_0^2 (t-2)^3\,dt = 16\,.$$

Weg $r_3$:

$$\int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ -2t \\ \dots \end{pmatrix} dt = -8 \int_{-2}^2 t\,dt = 0\,.$$

Weg $r_4$:

$$\int_{0}^{2} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} dt = 0\,.$$

Das Integral hat also den Wert $0 + 16 + 0 + 0 = 16\,.$

**Aufgabe 2** (*10 Punkte*)

**a)** Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die allgemeine komplexe Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y'(x) = Ay(x)$.

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = Ay(x) + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

**a)** Die Matrix $A$ hat das charakteristische Polynom

$$(-1-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1\,,$$

also die Eigenwerte $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Aus $(A - \lambda E)v = 0$ ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem für den ersten Eigenvektor.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-i & -1 & 0 \\ 2 & 1-i & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Da $A$ reell ist, muss der zweite Eigenvektor konjugiert komplex zum ersten Eigenvekor sein.

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Somit lautet die allgemeine komplexe Lösung

$$y_h(x) = c_1 e^{ix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} + c_2 e^{-ix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

**b)** Die Variation der Konstanten führt auf das Gleichungssystem $W(x)c'(x) = b(x)$, also

$$\left(\begin{array}{cc|c} -e^{ix} & -e^{-ix} & e^x \\ (1+i)e^{ix} & (1-i)e^{-ix} & 0 \end{array}\right).$$

Der Gaußalgorithmus ergibt

$$\begin{array}{l|cc|c|l} -(1) & e^{ix} & e^{-ix} & -e^x & (3) \\ (1)+(2) & ie^{ix} & -ie^{-ix} & e^x & (4) \\ \hline (3)-i(4) & 2e^{ix} & 0 & (-1-i)e^x & \\ (3)+i(4) & 0 & 2e^{-ix} & (-1+i)e^x & \end{array}$$

mit der Lösung

$$c_1'(x) = \frac{1}{2}(-1-i)e^{(1-i)x}\,, \qquad c_2'(x) = \frac{1}{2}(-1+i)e^{(1+i)x}\,.$$

**Alternativ** ergibt sich mit $\det(W(x)) = 2i$ und der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned}
c_1'(x) &= \frac{1}{2i}\det\begin{pmatrix} e^x & -e^{-ix} \\ 0 & (1-i)e^{-ix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-1-i)e^{(1-i)x} \\
c_2'(x) &= \frac{1}{2i}\det\begin{pmatrix} -e^{-ix} & e^x \\ (1+i)e^{ix} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-1+i)e^{(1+i)x}
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$c_1(x) = -\frac{i}{2}e^{(1-i)x}\,, \qquad c_2(x) = \frac{i}{2}e^{(1+i)x}\,,$$

und

$$y_p(x) = -\frac{i}{2}e^x\begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \frac{i}{2}e^x\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

ist eine partikuläre Lösung. Die allgemeine komplexe Lösung ist demnach

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{ix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} + c_2 e^{-ix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}\,.$$

**Aufgabe 3** (*10 Punkte*) Die $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = e^{x/2} \qquad \text{für} \quad x \in [0, 2\pi)$$

gegeben.

**a)** Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe von $f$.

**b)** Geben Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von $f$ an.

**c)** Gegen welche Funktion konvergiert die reelle Fourier-Reihe der Funktion $f$?

**d)** Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourier-Reihe von $f$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2}.$$

---

**a)** Die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe lauten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x/2} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1/2-in)x}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi(1-2in)} \left[ e^{(1/2-in)x} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{\pi} e^{-2in\pi} - 1}{\pi(1-2in)} = \frac{e^{\pi}-1}{\pi(1-2in)}. \end{aligned}$$

**b)** Die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe lassen sich aus den Koeffizienten der komplexen errechnen. Aus

$$c_n = \frac{e^{\pi}-1}{\pi(1-2in)} = \frac{(1+2in)(e^{\pi}-1)}{\pi(1+4n^2)}$$

folgt

$$a_0 = c_0 = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} \qquad a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = 2\,\frac{e^{\pi}-1}{\pi(1+4n^2)} \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = -\frac{4n(e^{\pi}-1)}{\pi(1+4n^2)}.$$

**c)** Die Fourier-Reihe konvergiert in jedem Punkt $x_0$ gegen $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$, also gegen

$$g(x) = \begin{cases} e^{(x-2\pi k)/2} & \text{für } x - 2k\pi \in (0, 2\pi) \\ \dfrac{1+e^{\pi}}{2} & \text{für } x = 2k\pi \end{cases}.$$

**d)** Das Einsetzen von $x = \pi$ führt zu

$$\begin{aligned} e^{\pi/2} &= f(\pi) = F(\pi) = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{e^{\pi}-1}{\pi(1+4n^2)} \cos(\pi n) = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2} (-1)^n \right) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2} = \frac{\pi e^{\pi/2}}{2(e^{\pi}-1)} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (*7 Punkte*)

Ermitteln Sie die Lösung $u(t,x)$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) + 3u(t,x) = 3t^2 + 2t$$

für die Anfangswerte $u(0,x) = e^{-2x}$.

---

Lineare partielle Dgl mit konstanten Koeffizienten:

$$u_t(t,x) + au_x(t,x) + bu(t,x) = f(t,x)\,, \quad u(0,x) = g(x)$$

Lösung:

$$u(t,x) = e^{-bt}g(x-at) + \int\limits_0^t f(r, x - a(t-r)))\exp(-b(t-r)\,dr$$

Hier: $a = 2\,,\ b = 3\,,\ f(t,x) = 3t^2 + 2t\,,\ g(x) = e^{-2x}$

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= e^{-3t}e^{-2(x-2t)} + \int\limits_0^t (3r^2+2r)e^{-3(t-r)}\,dr \\
&= e^{t-2x} + e^{-3t}\int\limits_0^t (3r^2+2r)e^{3r}\,dr \\
&= e^{t-2x} + e^{-3t}\left(\left[(3r^2+2r)\frac{1}{3}e^{3r}\right]_0^t - \frac{1}{3}\int\limits_0^t (6r+2)e^{3r}\,dr\right) \\
&= e^{t-2x} + t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{e^{-3t}}{3}\left(\left[(6r+2)\frac{1}{3}e^{3r}\right]_0^t - \int\limits_0^t 2e^{3r}\,dr\right) \\
&= e^{t-2x} + t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{6}{9}t - \frac{2}{9} + \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{e^{-3t}}{3}\left[2\frac{1}{3}e^{3r}\right]_0^t \\
&= e^{t-2x} + t^2\,.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (*12 Punkte*)

Eine Ampel stehe während der Zeitspanne $[0, r]$ auf „rot“ und während der Zeitpanne $(r, r+g]$ auf „grün“. Die Zufallsvariable $X$ messe den Zeitpunkt des Eintreffens eines Autos an der Ampel, sie sei auf $[0, r+g]$ gleichverteilt. Die Zufallsvariable $W$ messe die Wartezeit des Autos an der Ampel.

**a)** Drücken Sie $W$ in Abhängigkeit von $X$ aus.

**b)** Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $W$. Wie lautet das Ergebnis für $r = g$?

**c)** Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $W$ an.

---

**a)** Das Auto muss bis zum Ende der Rot-Phase warten, wenn es innerhalb der Rot-Phase eintrifft. Trifft es während der Grün-Phase ein muss es nicht warten. Es ist also

$$W = \Phi(X) = \begin{cases} r - X & X \in [0, r] \\ 0 & X \in (r, r+g] \end{cases}$$

**b)** Die auf $[0, r+g]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X$ hat die Dichte $f(x) = 1/(r+g)\,, x \in [0, r+g]$ somit ist der Erwartungswert von $W$

$$E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) f(x) dx = \int_0^r (r-x) \frac{1}{r+g} dx = \frac{r^2}{2(r+g)}$$

und mit

$$E(W^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x))^2 f(x) dx = \int_0^r (r-x)^2 \frac{1}{r+g} dx = \frac{r^3}{3(r+g)}$$

ist die Varianz

$$V(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = \frac{4r^4 + 4r^3 g - 3r^4}{12(r+g)^2} = \frac{r^4 + 4r^3 g}{12(r+g)^2}\,.$$

Für $r = g$ ist dann

$$E(W) = r^2/(4r) = r/4\,, \quad V(W) = 5r^4/(48r^2) = 5r^2/48\,.$$

**c)** Es gibt keine negativen Wartezeiten. Die Wartezeit 0 hat die Wahrscheinlichkeit entsprechend des Eintreffens während der Grün-Phase, also $g/(g+r)$. Die Wartezeit unter der Voraussetzung des Eintreffens während der Rot-Phase ist auf $(0, r]$ gleichverteilt. Somit ist die Verteilfunktion

$$F(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{g+w}{g+r} & w \in [0, r] \\ 1 & w > r \end{cases}$$

**Aufgabe 6** (*10 Punkte*)

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} cx\,e^{-x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

**a)** Bestimmen Sie $c > 0$ so, dass $f$ die Dichte einer reellwertigen Zufallsvariablen $X$ ist.

**b)** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

**c)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{1 \leq X \leq 2\})$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\{X \geq 1\}|\{X \leq 2\})$.

---

**a)**

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} cxe^{-x}\,dx = c\big[-xe^{-x}\big]_0^{\infty} + c\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = c\big[-e^{-x}\big]_0^{\infty} = c$$

$\Rightarrow c = 1$

**b)**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \big[-x^2e^{-x}\big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x\,e^{-x}\,dx = 0 + 2 = 2 \\ E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2\,f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx = \big[-x^3e^{-x}\big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3x^2\,e^{-x}\,dx = 3 \cdot 2 = 6 \\ V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

**c)** Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(\{X \leq x\}) = \int_0^x f(s)\,ds = \int_0^x se^{-s}\,ds = \big[-(s+1)e^{-s}\big]_0^x = 1 - (1+x)e^{-x}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} P(\{1 \leq X \leq 2\}) &= F(2) - F(1) = 2e^{-1} - 3e^{-2} \\ P(\{X \geq 1\}|\{X \leq 2\}) &= \frac{P(\{1 \leq X \leq 2\})}{P(\{X \leq 2\})} = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{1 - 3e^{-2}} \end{aligned}$$