Höhere Mathematik III **Prüfung** **07.09.09**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb, phys

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 6** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte Oktober auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

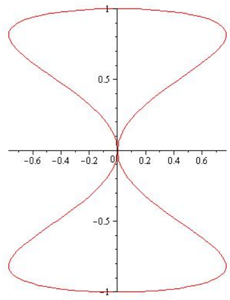
Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 19. Oktober 2009 (13.00-15.00 Uhr) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Berechnen Sie die von $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (-\sin(2t)\cos(t), \cos(t))$ eingeschlossene Fläche.
Hinweis:
Die Formeln $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $2\sin(t)^2 = 1 - \cos(2t)$, $2\cos(t)^2 = 1 + \cos(2t)$ und $\cos(t)^4 = \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2t) + \cos(4t))$ könnten hilfreich sein.



Aufgabe 2 (10 Punkte):

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$ sei die Differentialgleichung $z'(x) = \dfrac{3x^2-6x+5}{2(x-3)(x^2+5)}z - \dfrac{z}{2x}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung durch die Substitution $y = xz^2$ in die Form $y'(x) = \dfrac{3x^2-6x+5}{(x-3)(x^2+5)}y$ überführen lässt.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen für die in a) entstandene Differentialgleichung.
Hinweis: Eine (reelle) Partialbruchzerlegung des obigen Bruches könnte hilfreich sein.

c) Berechnen Sie nun die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung für den Anfangswert $z(4) = \sqrt{21}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Es sei die Differentialgleichung $y'(x) = 2^{-y(x)^2} - \frac{1}{2}$ gegeben.

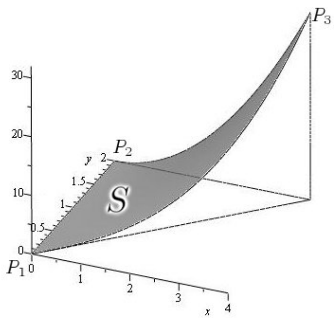
a) Zeigen Sie, dass zu jedem Startwert $y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y(x)$ mit $y(0) = y_0$ existiert.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und untersuchen Sie diese auf Stabilität.
Hinweis: Betrachten Sie dazu zum Beispiel das Phasenportrait.

c) Gegeben sei nun das Anfangswertproblem mit $y_0 = 0$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Lösung y der Differentialgleichung beschränkt bleibt.

Aufgabe 4 (11 Punkte):

Sei D das Dreieck in der xy-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0,0), (0,2,0), (4,2,0)$, und sei A die Oberfläche des Körpers $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le x^2y\}$, der zwischen D und dem Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2y$ liegt (die Orientierung sei so gewählt, dass der Normalenvektor stets nach außen zeigt). Sei weiter das Vektorfeld $V(x,y,z) = (2xy - y + z, x^2 + x + z, x + y)$ gegeben.



a) Berechnen Sie $\int_A \langle V, \mathbf{n} \rangle \, d\mathbf{s}$.

b) Sei S derjenige Teil der Oberfläche aus A, der die Eckpunkte $P_1 = (0,0,0), P_2 = (0,2,0)$ und $P_3 = (4,2,32)$ hat (vgl. Skizze) und ∂S dessen Randkurve, durchlaufen in der Richtung $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$.
Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_{\partial S} \langle V, d\mathbf{x} \rangle$.

Aufgabe 5 (10 Punkte):

Sei die Differentialgleichung $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda+1)y(x) = 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass bei einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Koeffizienten der Rekursionsformel $a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda(\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$ genügen.

b) Seien die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Lösung für $\lambda = 2n, n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom vom Grad kleiner gleich $2n$ ist.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem aus b) für $\lambda = 4$ explizit.

Aufgabe 6 (9 Punkte):

Gegeben sei das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-2\sin(x)} \, dx$.

a) Führen Sie das Integral mit Hilfe der Identität $\sin(x) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})$ und der Substitution $z = \mathrm{e}^{ix}$ in ein Integral über den komplexen Einheitskreis über.

b) Berechnen Sie damit den Wert des obigen Integrals mit Hilfe des Residuensatzes.