Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. J. Brüdern

Höhere Mathematik III **Prüfung** **08.09.09**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb, phys

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 6** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte Oktober auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM III.

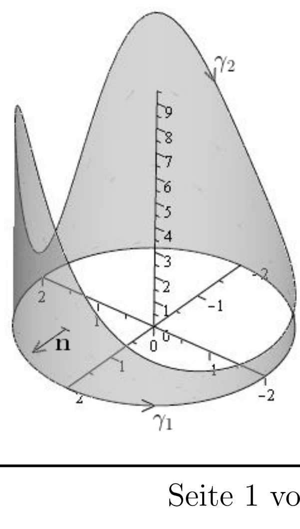
  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 19. Oktober 2009 (13.00-15.00 Uhr) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte):
Sei das Vektorfeld $V(x,y,z) = \big(-y, x, 0\big)$ sowie die Fläche
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 1 + y^2 \mathrm{e}^x\}$ gegeben.
Sei mit γ_1 der untere Rand und mit γ_2 der obere Rand der Fläche bezeichnet (Orientierung siehe Skizze).



a) Parametrisieren Sie die Fläche F und zeigen Sie, dass für den Normalenvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ von F gilt, dass $n_3 = 0$.
b) Bestimmen Sie die Werte folgender Integrale:

$$\int_F \langle \operatorname{rot} V, \mathbf{n} \rangle \, d\mathbf{s}, \quad \int_{\gamma_1} \langle V, d\mathbf{x} \rangle \ \text{ und } \int_{\gamma_2} \langle V, d\mathbf{x} \rangle \, .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte):
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und das Vektorfeld $V(x,y,z) = (f(x,y,z), y^2 + yz^2, y^2 z)$. Weiter sei der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(\varphi) = (\sin(\varphi), \cos(\varphi), 1)$ gegeben.

a) Für welche Funktionen f besitzt das Vektorfeld eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie für $f(x,y,z) = \cos(x)$ eine Stammfunktion von V und berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma \langle V, d\mathbf{x}\rangle$.

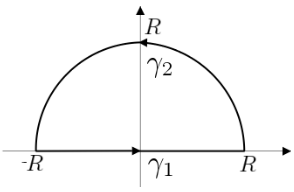
c) Berechnen Sie für $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ das Arbeitsintegral $\int_\gamma \langle V, d\mathbf{x}\rangle$.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom von Grad 3 im Entwicklungspunkt 0 der Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{1-z}$.
Welchen Konvergenzradius besitzt die Potenzreihe von f im Entwicklungspunkt 0?

b) Für welche $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f(x+iy) = x^3y^2+ix^2y^3$ komplex differenzierbar?

Aufgabe 4 (10 Punkte):
Berechnen Sie für $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-i)^2}\mathrm{e}^{2\pi ixy}\,dx$ mit Hilfe komplexer Integration.
Hinweis: Verwenden Sie den Integrationsweg aus nebenstehender Skizze und betrachten Sie dann den Grenzübergang $R \to \infty$.



Aufgabe 5 (12 Punkte):
Gegeben sei das dynamische System $\binom{x}{y}' = \begin{pmatrix} -x+y^2(1-y)^2 \\ y(1-y) \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems und überprüfen Sie diese auf Stabilität.

b) Bestimmen Sie eine explizite Lösung $\varphi(t)$ für den Anfangswert $\varphi(0) = \binom{c}{0}$ mit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)$.

c) Begründen Sie, dass für eine Lösung $\psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $y(0) < 0$ stets $y(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 6 (10 Punkte):
In dieser Aufgabe soll für $z \in \mathbb{R}$ die Fouriertransformation $\hat{f}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi ixz}\,dx$ der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-3x^2}$ berechnet werden. Sei dazu die Hilfsfunktion $g(x) = -2\pi ixf(x)$ gegeben.

a) Zeigen Sie

i) $(\widehat{\tfrac{d}{dx}f})(z) = \frac{3}{\pi i}\hat{g}(z)$ durch Differentiation von f,

ii) $(\widehat{\tfrac{d}{dx}f})(z) = 2\pi iz\hat{f}(z)$ mit Hilfe partieller Integration,

iii) $\frac{d}{dz}\hat{f}(z) = \hat{g}(z)$.

b) Stellen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) eine Differentialgleichung für $\hat{f}$ in der Form $\frac{d}{dz}\hat{f}(z) = Cz\hat{f}(z)$ mit $C \in \mathbb{C}$ auf und lösen Sie diese.

c) Warum ist die Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabenteil b) mit Anfangswert $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ die ursprünglich gesuchte Fouriertransformation?