Prof. Dr. C. Rohde
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtung
bau, fmt, iui, mach, tema, umw

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter, dokumentenechter Stift (nicht in den Farben Rot oder Grün).
- Bei den **Aufgaben 1-5** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bei **Aufgabe 6** wird nur das Ergebnis gewertet. Lösungswege werden nicht berücksichtigt. Diese Aufgabe ist direkt auf dem Aufgabenblatt zu bearbeiten. Tragen Sie deshalb Name und Matrikelnummer in die dafür vorgesehenen Kästchen auf dem Aufgabenblatt ein.
- In dieser Klausur können bis zu **48 Punkte** erreicht werden.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: | **Matrikel–Nr.:**

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Für $x > 0$ sei

$$U(x) := \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt.$$

Berechnen Sie $U'(1)$.

Aufgabe 2 (12 Punkte):
Bestimmen Sie jeweils die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

a)
$$y'''(x) + 4y''(x) - 5y'(x) = 4e^x.$$

b)
$$y'''(x) + 4y''(x) - 5y'(x) = 1 - 13\sin(x) + 4e^x.$$

Aufgabe 3 (12 Punkte):
Für $a, b, c > 0$ sei

$$D := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1 \right\}.$$

a) Berechnen Sie für den Spezialfall $a = b = c = 2$ die Fläche des Randes ∂D von D.

b) Berechnen Sie für den Spezialfall $a = 1, b = 2, c = 3$

$$\int_{\partial D} f \cdot n \, d\sigma,$$

wobei n der nach außen weisende Normalenvektor und

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (xz, yz, z^2 + 1)$$

ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{\pi}{2}(4j + 1) - x$ für $x \in [2\pi j - \pi/2, 2\pi j + 3\pi/2)$, $j \in \mathbb{Z}$.
Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von f.

Aufgabe 5 (8 Punkte):
Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad x(1) = 1,$$

für $f(z) = \dfrac{1}{4} + z^2$.

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind:

		wahr	**falsch**
i)	Sind $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $$f(x,y,z) = (x,0,0)^\top \text{ bzw. } g(x,y,z) = (0,y,0)^\top,$$ so gilt für jede Kugeloberfläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, dass $$\int_\Sigma f \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma g \cdot n \, \mathrm{d}\sigma,$$ wenn n den nach außen weisenden Normalenvektor bezeichnet.	☐	☐
ii)	Jede skalare lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung lässt sich auf ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit n Gleichungen zurückführen.	☐	☐
iii)	Der Kreisring $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ ist ein Normalbereich.	☐	☐
iv)	Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ und $A \neq B$. Die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sei gleichzeitig Lösung von $$u' = Au \text{ und } u' = Bu.$$ Dann muss gelten $u \equiv 0$.	☐	☐

Bemerkung:

Bei dieser Aufgabe ist **keine** Begründung Ihrer Antwort verlangt.
Jede **richtige** Antwort wird mit 1 **Punkt** bewertet, jede **falsche** Antwort mit -1 **Punkt**.
Nichtbeantwortete Fragen werden mit 0 **Punkten** bewertet.
Die Aufgabe kann insgesamt nicht mit weniger als 0 Punkten gewertet werden.