Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Teufel, Dr. N. Röhrl, J. Spreer

Mathematik inf / sotech / tpinf

Prüfungsklausur, 3. 9. 2009

Name: ______________________ Matrikelnr.: __________ Fachrichtung: __________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$	Note
Punkte										/60	

Aufgabe 1 (3 Punkte) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ -35 & -12 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $v_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $v_2 = \boxed{}$

b) Berechnen Sie die Diagonalgestalt von A.

$\Delta_A = \boxed{}$

c) Geben Sie die Transformationsmatrix T der Ähnlichkeitstransformation $T^{-1}AT = \Delta_A$ an.

$T = \boxed{}$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

a) $f : V \to W$ sei eine Abbildung zweier reeller Vektorräume. Formulieren Sie die Definition für die Linearität von f.

b) Vervollständigen Sie die Wahrheitstafel für die Implikation $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \Rightarrow B$

c) (a_n), $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge reeller Zahlen. Wie lautet das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung, $x_0 \in \mathbb{R}$. Vervollständigen Sie die Definition der Ableitung von f an der Stelle x_0.

$f'(x_0) =$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Vervollständigen Sie zur Taylorentwicklung bis zum Grad 2 einschließlich Restglied.

$f(x) = f(x_0)+$

f) Berechnen Sie im Restklassenring $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$[2] + [3] =$ $\qquad$ $[2] \cdot [3] =$

g) A sei eine reelle $n \times n$-Matrix. Formulieren Sie ein Kriterium für die Invertierbarkeit von A.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Zeige Sie, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen (vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

b) Geben Sie die Transformationsmatrizen für die Transformation in die Standardbasis an:

$T = \boxed{}$ $\quad T^{-1} = \boxed{}$

c) Gegeben Sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad b_1 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b_2 \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ist L eindeutig bestimmt (begründen Sie)?

d) Stellen Sie die zu L gehörige Matrix bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ dar (vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktion

$$\int xe^{1-x^2}\,dx\,.$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} (x-1)^n$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Aufgabe 7 (8 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 3x.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

grad f = $\boxed{}$ Hf = $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (relatives Maximum, relatives Minimum, Sattelpunkt).

Aufgabe 8 (8 Punkte) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' - (x + 1)y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

Aufgabe 9 (5 Punkte) Berechnen Sie den Genzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)