Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Teufel, Dr. N. Röhrl, J. Spreer

Mathematik inf / sotech / tpinf

Musterlösung für Klausur 1

Aufgabe 1 (3 Punkte) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)

Beweis mit Induktion:

Induktionsanfang $n = 0$:

$$(2 * 0 + 1) = (0 + 1)^2 \Rightarrow 1 = 1.$$

Induktionshypothese: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss: $n \longrightarrow n + 1$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2 + (2n + 3) = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$$

Beweis ohne Induktion:

$$\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) &= \sum_{k=0}^{n} (2k + 1) \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 2\frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\
&= n(n + 1) + (n + 1) \\
&= (n + 1)(n + 1) \\
&= (n + 1)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ -35 & -12 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$$\lambda_1 = 3; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Diagonalgestalt von A.

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie die Transformationsmatrix T der Ähnlichkeitstransformation $T^{-1}AT = \Delta_A$ an.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

a) $f : V \to W$ sei eine Abbildung zweier reeller Vektorräume. Formulieren Sie die Definition für die Linearität von f.

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2); \quad f(\lambda v) = \lambda f(v); \quad \forall v, v_1, v_2 \in V; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Vervollständigen Sie die Wahrheitstafel für die Implikation $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

c) (a_n), $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge reeller Zahlen. Wie lautet das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon) : \quad |a_k - a_l| < \epsilon \quad \forall k, l \geq n(\epsilon)$$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung, $x_0 \in \mathbb{R}$. Vervollständigen Sie die Definition der Ableitung von f an der Stelle x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Vervollständigen Sie zur Taylorentwicklung bis zum Grad 2 einschließlich Restglied.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_0)^3; \quad \xi \in (x, x_0) \text{ bzw. } (x_0, x)$$

f) Berechnen Sie im Restklassenring $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$$[2] + [3] = [1]; \quad [2] \cdot [3] = [2]$$

g) A sei eine reelle $n \times n$-Matrix. Formulieren Sie ein Kriterium für die Invertierbarkeit von A.

$$\det(A) \neq 0; \quad \text{rang}(A) = n; \text{ Spaltenvektoren sind linear unabhängig.}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Zeige Sie, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen (vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

Zu zeigen ist, dass

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie die Transformationsmatrizen für die Transformation in die Standardbasis an:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben Sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad b_1 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b_2 \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ist L eindeutig bestimmt (begründen Sie)?

Da (b_1, b_2, b_3) eine Basis ist, ist L mit Angabe der Bilder der Basis bereits eindeutig bestimmt.

d) Stellen Sie die zu L gehörige Matrix bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ dar (vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

$$A \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktion

$$\int xe^{1-x^2}\,dx\,.$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt)
Für $f_1\colon u \mapsto e^u$ und die Substitution $u_1\colon x \mapsto 1-x^2$ erhält man $u_1'(x) = -2x$ und damit

$$\int xe^{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{u_1}\,du_1 = -\frac{1}{2}\int f_1(u)\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{u_1}\right] = \left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right].$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}\,(x-1)^n$$

(vollständige Rechnung auf separatem Blatt).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}(x-1)^n$$

$a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varrho = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Aufgabe 7 (8 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 3x.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 3 \\ 6xy \end{pmatrix};\quad Hf = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

$$P_{1/2} = (0, \pm 1);\quad P_{3/4} = (\pm 1, 0)$$

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (relatives Maximum, relatives Minimum, Sattelpunkt).

P_1: Sattelpunkt
P_2: Sattelpunkt
P_3: relatives Minimum
P_4: relatives Maximum

Aufgabe 8 (8 Punkte) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' - (x+1)y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
y' &= (x+1)y \\
\frac{dy}{dx} &= (x+1)y \\
\frac{dy}{y} &= (x+1)dx \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int x+1dx \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2+x+\tilde{c} \\
y_h &= c\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x}
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x} \quad \text{Variation der Konstanten} \\
c'(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2-x} = \mathrm{e}^{-x} \\
c(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,dt \\
c(x) &= [-\mathrm{e}^{-t}]_0^x \\
c(x) &= -\mathrm{e}^{-x}+1 \\
y_p(x) &= (-\mathrm{e}^{-x}+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x} \\
&= -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x} \\
&= (\mathrm{e}^x-1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
y &= y_p + y_h \\
y(x) &= (\mathrm{e}^x-1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}+c\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x} \\
y(0) &= 0+c = 1 \\
c &= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 9 (5 **Punkte)** Berechnen Sie den Genzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x} = 2$$