Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. M. Griesemer

Höhere Mathematik I/II — 07.09.2009

Prüfung (Haupttermin)

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, phys, mech, tpel

Vorname:	**Name:**
Matrikelnummer:	**Studiengang:**

Bitte beachten Sie unbedingt die folgenden **Hinweise:**

- Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 9** Aufgaben.
- In den **Aufgaben 1–4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den **Aufgaben 5–9** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästchen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig** !
- Zugelassene Hilfsmittel: **6 eigenhändig beschriebene Seiten im Format DIN A4** sind erlaubt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte Oktober auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden.
  Eine Ankündigung erfolgt auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg** !

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine ebenfalls Mitte Oktober auf der Homepage zu HM III bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Hinweis: Bei den Aufgaben auf dieser Seite sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Ergebnissen allein genügt nicht!

Aufgabe 1 (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $(0,0,6)^\top$ auf den Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$, welcher durch $(1,0,-1)^\top$ und $(2,1,0)^\top$ aufgespannt wird.

b) Die orthogonale Projektion x_U eines Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ auf den Unterraum U aus Teil a) definiert eine lineare Abbildung $x \mapsto x_U$ (Ein Nachweis hierfür ist nicht nötig!). Bestimmen Sie die zugehörige 3×3-Matrix A.

c) Bestimmen Sie den Kern und den Rang der Matrix A aus Teil b).

(Hinweis: Die Matrixkoeffizienten A_{ij} werden dazu nicht benötigt.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Geben Sie eine Stammfunktion von $\cos(t^2)$ in Form einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 an.

b) Bestimmen Sie für das Integral

$$I := \int_0^1 \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

einen numerischen Näherungswert S in Form einer endlichen Summe, der $|I - S| < 10^{-3}$ erfüllt. Begründen Sie Ihre Wahl von S.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y) = 3x^3 + x^2 - 9x - 2xy + y^2$ definiert.

a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und klassifizieren Sie diese.

b) Bestimmen Sie die Linearisierung von f, d.h. die Gleichung der Tangentialebene, im Punkt $(2,1)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^\top$ definiert. Berechnen Sie

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}z.$$

b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ y^3 + \alpha x y \end{pmatrix}$$

ein Potential? Geben Sie jeweils ein Potential an.

Hinweis: Bei allen nachfolgenden Aufgaben genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Die komplexe Zahl w sei in Polardarstellung durch $w = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi i}$ gegeben.

a) Stellen Sie w in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar:

$$w = \boxed{}\,.$$

b) Berechnen Sie w^{1001} und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, an:

$$w^{1001} = \boxed{}\,.$$

c) Die komplexen Zahlen w und $\overline{w}$ sind Nullstellen des Polynoms p mit $p(z) = z^3 - z^2 + 2$. Finden Sie alle weiteren Nullstellen von p:

$$\boxed{}\,.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sei das vom reellen Parameter t abhängige lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcr} tx_1 & + & (t^2-1)x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 3tx_2 & = & -2 \end{array}\right\} (*).$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt $(*)$ genau eine Lösung? $\boxed{}$

b) $(*)$ besitzt für $t = \boxed{}$ keine Lösung und für $t = \boxed{}$ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Gegeben sei eine Quadrik durch

$$Q:\ 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 10\sqrt{2}x_1 - 22\sqrt{2}x_2 - 4x_3 + 10 = 0.$$

a) Bestimmen Sie die symmetrische 3×3-Matrix A, den Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ und die Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ der Matrixbeschreibung $x^\top Ax + a^\top x + \beta = 0$ von Q:

$$A = \boxed{}\ , \qquad a = \boxed{}\ , \qquad \beta = \boxed{}\ .$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A sowie eine Orthonormalbasis zugehöriger Eigenvektoren b_1, b_2, b_3:

$$\lambda_1 = \boxed{}\ , \quad \lambda_2 = \boxed{}\ , \quad \lambda_3 = \boxed{}\ ,$$

$$b_1 = \boxed{}\ , \quad b_2 = \boxed{}\ , \quad b_3 = \boxed{}\ .$$

c) Geben Sie die Normalform der Quadrik Q an:

$$\boxed{}\ .$$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \boxed{}$,

ii) $\displaystyle\int \frac{2\sin x \cos x}{3+(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{}$.

b) Geben Sie die reelle Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktion an:

$$\frac{x^2+2x-13}{(1+x^2)(7-x)} = \boxed{} .$$

Bestimmen Sie damit

$$\int \frac{x^2+2x-13}{(1+x^2)(7-x)}\,\mathrm{d}x = \boxed{} .$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius R der nachstehenden Potenzreihen:

Potenzreihe	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{3} \left(\frac{x}{4}\right)^n$
Konvergenzradius R			

.

b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall I für die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}(x+1)^n$:

$$I = \boxed{} .$$