Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 6 – 8** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 19. 10. 2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19. 10.** bis **28. 10. 2009** mit Frau Dr. Iryna Rybak (Raum V 57.7.163) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - z + \frac{1}{4} - i = 0$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$f_1 = (-1,\, 0,\, 1)^\intercal, \qquad f_2 = (3,\, c,\, 0)^\intercal, \qquad f_3 = (-2,\, 1,\, c)^\intercal$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x^3+2}\cos(x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x \sin(x)}{e^{2x}-3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x\ln(x)-10}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} {}^1\!/_v \\ -{}^u\!/_{v^2} \end{pmatrix}$$

und die Kurve K, die parametrisiert wird durch

$$C\colon \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. $\operatorname{Sp} A =$ $\det A =$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. $\chi_A(\lambda) =$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 =$

(d) Bestimmen Sie die Menge M *aller* Eigenwerte von A. $M =$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{x+y} - \sin(xy)$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (0,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big) =$$

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}\,t = \boxed{}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{e^x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$