Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In allen Aufgaben sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 14. 04. 2010 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich vom 26. 04. bis zum 30. 04. 2010 bei Prof. Harbrecht (Zimmer AR 5b, 0.40; `harbrecht@ians.uni-stuttgart.de`) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Ausgewählte Werte der Verteilungsfunktion $\Phi_{0,1}(z)$ für die Standardnormalverteilung

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952

Aufgabe 1 (*15 Punkte*)

Gegeben sei der Körper K mit

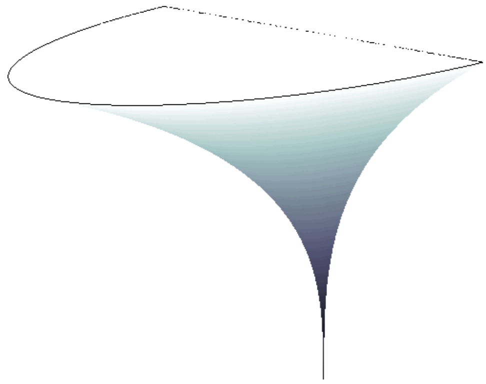
$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ y \geq 0,\ y^2 + x^2 \leq z^6\right\}.$$

a) Die Dichte von K sei gegeben durch $\varrho(x, y, z) = 4z$. Berechnen Sie die Masse

$$m_K = \int_K \varrho(x, y, z)\, d(x, y, z).$$

b) Die Randfläche ∂K von K lässt sich in drei Teilstücke S_1, S_2 und S_3 zerlegen, wobei

$$S_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ y \geq 0,\ y^2 + x^2 = z^6\right\}.$$



Geben Sie die beiden anderen Randflächen S_1, S_2 sowie die zugehörigen nach außen gerichteten Normalenvektoren n_1, n_2 an.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluss

$$\int_{S_3} F(x, y, z) \cdot n_3(x, y, z)\, ds_{(x,y,z)}$$

des Vektorfeldes F mit

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4xz - x^2 \\ 0 \\ 2xz + y \end{pmatrix}$$

durch die Fläche S_3, wobei $n_3(x, y, z)$ den von K aus nach außen gerichteten normierten Normalenvektor der Fläche S_3 bezeichnet.

Aufgabe 2 (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeine komplexe und die allgemeine reelle Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(x) = Ay(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die reelle Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$u'''(t) - 6u''(t) + 9u'(t) = 24e^{3t}, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = -1,\ u''(0) = 2.$$

a) Geben Sie die Gleichung an, in die das Anfangswertproblem durch Laplace-Transformation $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ übergeht, und lösen Sie diese nach $U(s)$ auf.

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.
Hinweis: $\mathcal{L}\left(t^n e^{at}\right)(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) \qquad \text{für } t \in (0,\infty), x \in (0,\pi), \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad \text{für } t \in (0,\infty)$$

und der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \sin(2x)e^{-x} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) Lösen Sie die Gleichung (1) mit den gegebenen Randbedingungen durch den Separationsansatz.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Lösung aus a), so dass die Anfangsbedingung erfüllt wird.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Ein Gerät bestehe aus 3 nacheinander angeordneten Teilsystemen, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten 0,2, 0,4 und 0,5 ausfallen können. Das Gerät sei nur funktionsfähig, wenn alle Teilsysteme funktionieren.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät funktionsfähig?

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit aus a), wenn dem dritten Teilsystem noch zwei unabhängige Reservesysteme (ebenfalls mit der Ausfallwahrscheinlichkeit 0,5) parallel geschaltet werden?

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

Bei der Herstellung von Gewindestiften sei deren Länge eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 30$ mm und $\sigma^2 = 0{,}25$ mm^2. Ein Gewindestift ist für die Montage verwendbar, wenn er mindestens 29 mm lang ist. Die Lieferung der Stifte erfolge in Packungen zu 1000 Stück.

a) Wie groß ist die mittlere Anzahl der verwendbaren Stifte einer Packung?

b) Auf welchen Wert müsste der Mittelwert μ eingestellt werden, damit der Anteil der nicht verwendbaren Stifte nur noch 1% beträgt?
