Aufgabe 1 (*15 Punkte*)

Gegeben sei der Körper K mit

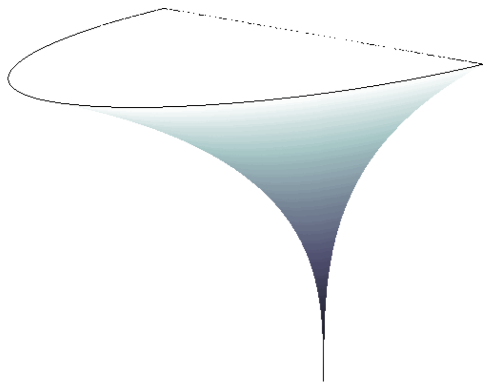
$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\ y \ge 0,\ y^2 + x^2 \le z^6\right\}.$$

a) Die Dichte von K sei gegeben durch $\varrho(x, y, z) = 4z$. Berechnen Sie die Masse

$$m_K = \int_K \varrho(x, y, z)\, d(x, y, z).$$

b) Die Randfläche ∂K von K lässt sich in drei Teilstücke S_1, S_2 und S_3 zerlegen, wobei

$$S_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\ y \ge 0,\ y^2 + x^2 = z^6\right\}.$$



Geben Sie die beiden anderen Randflächen S_1, S_2 sowie die zugehörigen nach außen gerichteten Normalenvektoren n_1, n_2 an.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluss

$$\int_{S_3} F(x, y, z) \cdot n_3(x, y, z)\, ds_{(x,y,z)}$$

des Vektorfeldes F mit

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4xz - x^2 \\ 0 \\ 2xz + y \end{pmatrix}$$

durch die Fläche S_3, wobei $n_3(x, y, z)$ den von K aus nach außen gerichteten normierten Normalenvektor der Fläche S_3 bezeichnet.

Halber Rotationskörper; Parametrisierung über Zylinderkoordinaten:

$$K = \left\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) : 0 \le z \le 1, 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le z^3\right\}.$$

a) Masse ergibt sich als Volumenintegral über Dichte:

$$\begin{aligned} m_K = \int_K \varrho(x, y, z)\, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{z^3} 4zr\, dr\, d\varphi\, dz \\ &= \pi \int_0^1 2z^7\, dz = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

b) Die beiden anderen Teilstücke von ∂K lauten

$$\begin{aligned} S_1 &= K \cap \{y = 0\} = \left\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\ x^2 \le z^6\right\}, \\ S_2 &= K \cap \{z = 1\} = \left\{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : y \ge 0,\ y^2 + x^2 \le 1\right\} \\ &= \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi\right\}. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Normalenvektoren sind

$$n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich

$$\int_{S_3} F \cdot n_3 \, ds_{(x,y,z)} = \int_K \operatorname{div} F \, d(x,y,z) - \int_{S_1} F \cdot n_1 \, ds_{(x,y,z)} - \int_{S_2} F \cdot n_2 \, ds_{(x,y,z)}. \tag{1}$$

Die Divergenz von F ist

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 4z - 2x + 2x = 4z = \varrho(x,y,z),$$

und somit ist der erste Summand von (1) durch das Integral aus a) gegeben. Für die weiteren Terme betrachten wir die Flächenintegrale über die Seitenflächen S_1 und S_2

$$\int_{S_1} F(x,y,z) \cdot n_1(x,y,z) \, ds_{(x,y,z)} = \int_{S_1} \begin{pmatrix} 4xz - x^2 \\ 0 \\ 2xz + 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(x,z) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} F(x,y,z) \cdot n_2(x,y,z) \, ds_{(x,y,z)} &= \int_{S_2} \begin{pmatrix} 4x - x^2 \\ 0 \\ 2x + y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y) \\
&= \int_{S_2} (2x + y) \, d(x,y) = \int_0^\pi \int_0^1 (2r\cos\varphi + r\sin\varphi) r \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^\pi (2\cos\varphi + \sin\varphi) \, d\varphi \\
&= \frac{1}{3} \left[2\sin\varphi - \cos\varphi\right]_0^\pi = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{S_3} F(x,y,z) \cdot n_3(x,y,z) \, ds_{(x,y,z)} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 2 (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeine komplexe und die allgemeine reelle Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(x) = Ay(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die reelle Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

---

a) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(z) = (-1-z)(-1-z) + 4 = z^2 + 2z + 5.$$

Damit sind $z_{1,2} = -1 \pm 2i$ die gesuchten Nullstellen von $p(z)$. Die zugehörigen Eigenvektoren v^1 und v^2 ergeben sich zu

- $z_1 = -1 + 2i$: $\quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$
- $z_2 = -1 - 2i$: $\quad v^2 = \bar{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$

Das komplexe Fundamentalsystem lautet also

$$\left\{ e^{(-1+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}, e^{(-1-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\},$$

und die allgemeine komplexe Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{(-1+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} + c_2 e^{(-1-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung erhält man durch Bildung von Real- und Imaginärteil. Das reelle Fundamentalsystem lautet

$$\left\{ e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -2\cos(2x) \end{pmatrix} \right\}$$

Damit folgt die allgemeine reelle Lösung

$$y(x) = a_1 e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix} + a_2 e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -2\cos(2x) \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Mit den Anfangswerten ergibt sich

$$y(0) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ und die spezielle Lösung

$$y(x) = 2e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix} - e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -2\cos(2x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$u'''(t) - 6u''(t) + 9u'(t) = 24e^{3t}, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = -1,\ u''(0) = 2.$$

a) Geben Sie die Gleichung an, in die das Anfangswertproblem durch Laplace-Transformation $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ übergeht, und lösen Sie diese nach $U(s)$ auf.

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.

Hinweis: $\mathcal{L}\left(t^n e^{at}\right)(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

---

a)

$$\begin{aligned}
24e^{3t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{24}{s-3}\\
u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)\\
u'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0) = sU(s)\\
u''(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s) + 1\\
u'''(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) = s^3U(s) + s - 2
\end{aligned}$$

Transformierte Gleichung:

$$s^3U(s) + s - 2 - 6(s^2U(s) + 1) + 9sU(s) = \frac{24}{s-3}$$

Auflösen nach $U(s)$:

$$\begin{aligned}
(s^3 - 6s^2 + 9s)U(s) + s - 8 = s(s-3)^2U(s) + s - 8 &= \frac{24}{s-3}\\
\Rightarrow \quad U(s) &= \frac{24 + (s-3)(8-s)}{s(s-3)^3}\\
&= \frac{-s^2 + 11s}{s(s-3)^3} = \frac{11-s}{(s-3)^3}.
\end{aligned}$$

b) Die Lösung $u(t)$ ergibt sich durch Rücktransformation von U:

$$\begin{aligned}
U(s) &= \frac{3-s}{(s-3)^3} + \frac{8}{(s-3)^3}\\
&= -1\frac{1}{(s-3)^2} + 8\frac{1}{(s-3)^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -te^{3t} + 4t^2e^{3t}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) \quad \text{für } t \in (0,\infty), x \in (0,\pi), \tag{2}$$

mit den Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{für } t \in (0,\infty)$$

und der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \sin(2x)e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) Lösen Sie die Gleichung (2) mit den gegebenen Randbedingungen durch den Separationsansatz.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Lösung aus a), so dass die Anfangsbedingung erfüllt wird.

---

a) Der Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ führt auf

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} + 2\frac{w'(x)}{w(x)} = c = \text{const.},$$

d.h.

$$w''(x) + 2w'(x) - cw(x) = 0,$$
$$v'(t) = cv(t).$$

<u>Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung für w:</u>
Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 2\lambda - c = 0$, d.h.

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+c}.$$

Fallunterscheidung für c:

(i) 2 reelle Eigenwerte: $c > -1$

$$w(x) = ae^{(-1+\sqrt{1+c})x} + be^{(-1-\sqrt{1+c})x}.$$

Aus den Randbedingungen folgt $a = b = 0$.

(ii) 1 doppelter Eigenwert: $c = -1$

$$w(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}.$$

Aus den Randbedingungen folgt $a = b = 0$.

(iii) 2 komplexe Eigenwerte: $c < -1$, d.h. $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{-c-1}$.

$$w(x) = ae^{-x}\cos\left(\sqrt{-c-1}x\right) + be^{-x}\sin\left(\sqrt{-c-1}x\right).$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\begin{aligned} w(0) &= a = 0, \\ w(\pi) &= be^{-\pi}\sin\left(\sqrt{-c-1}\pi\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad b = 0 \text{ oder } \sqrt{-c-1} = n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind also gegeben durch

$$w_n(x) = a_n e^{-x}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung für v:
Die allgemeine Lösung ist $v(t) = be^{ct}$, d.h., wenn man $c = -(n^2+1)$ einsetzt, ergibt sich

$$v_n(t) = b_n e^{-(n^2+1)t}.$$

Allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$u(t,x) = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n^2+1)t}\sin(nx). \tag{3}$$

b) Einsetzen von $t = 0$ in (3) führt zu

$$u(0,x) = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} \sin(2x)e^{-x}.$$

Es gilt also

$$a_n = \begin{cases} a_n = 1 & \text{für } n = 2, \\ a_n = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Lösung des Anfanswertproblems ist folglich

$$u(t,x) = e^{-5t}e^{-x}\sin(2x).$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Ein Gerät bestehe aus 3 nacheinander angeordneten Teilsystemen, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten 0,2, 0,4 und 0,5 ausfallen können. Das Gerät sei nur funktionsfähig, wenn alle Teilsysteme funktionieren.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät funktionsfähig?

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit aus a), wenn dem dritten Teilsystem noch zwei unabhängige Reservesysteme (ebenfalls mit der Ausfallwahrscheinlichkeit 0,5) parallel geschaltet werden?

---

a)

$$A, (B, C) \mathrel{\widehat{=}} \text{Teilsystem 1 (2,3) funktioniert}$$
$$P(A) = \frac{4}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Mit der Unabhängigkeit der Teilsysteme ergibt sich

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{25} = \underline{0.24}$$

b)

$$c_i \mathrel{\widehat{=}} \text{Teil } i \text{ des dritten Teilssystems funktioniert} \quad P(c_i) = 0.5$$
$$P(\overline{C}_{neu}) = P(\overline{c}_1 \cap \overline{c}_2 \cap \overline{c}_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$
$$\Rightarrow \quad P(C_{neu}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$
$$\Rightarrow \quad P(A \cap B \cap C_{neu}) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C_{neu}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{50} = \underline{0.42}.$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

Bei der Herstellung von Gewindestiften sei deren Länge eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 30$ mm und $\sigma^2 = 0{,}25$ mm^2. Ein Gewindestift ist für die Montage verwendbar, wenn er mindestens 29 mm lang ist. Die Lieferung der Stifte erfolge in Packungen zu 1000 Stück.

a) Wie groß ist die mittlere Anzahl der verwendbaren Stifte einer Packung?

b) Auf welchen Wert müsste der Mittelwert μ eingestellt werden, damit der Anteil der nicht verwendbaren Stifte nur noch 1% beträgt?

---

a)

$$X \mathrel{\widehat{=}} \text{Länge des Gewindestifts} \qquad X \sim N(30, 0.25)$$

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 29)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 29) &= 1 - P(X < 29) = 1 - P\left(\frac{X-30}{0.5} < \frac{29-30}{0.5}\right) \\ &= 1 - \Phi(-2) = 1 - \big(1 - \Phi(2)\big) = \Phi(2) \\ &= 0.9772. \end{aligned}$$

Damit sind $1000 \cdot 0.9772 = \underline{977.2}$ Gewindestifte im Mittel brauchbar.

b) Jetzt ist $X \sim N(\mu, 0.25)$. Mit

$$P(X \geq 29) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{0.5} < \frac{29-\mu}{0.5}\right) = \Phi\left(\frac{\mu-29}{0.5}\right)$$

ergibt sich

$$\Phi\left(\frac{\mu-29}{0.5}\right) \overset{!}{=} 0.99 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu-29}{0.5} \overset{!}{=} 2.33 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2.33 \cdot 0.5 + 29 = \underline{30.165}$$