Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 5 – 7** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\|x\|$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 15. 04. 2010 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19. 04.** bis **29. 04. 2010** mit Frau Dr. Iryna Rybak (täglich 10 Uhr - 12 Uhr, Raum V 57.7.151) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\} .$$

Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} .$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left((x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil **(b)**.

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{2x_1 - x_2} \begin{pmatrix} 1 + 2x_1 + 2x_2 \\ -\alpha - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und der Weg C, welcher geradlinig von $(1,1)$ zu $(1,3)$ läuft.

(a) Entscheiden Sie, für welche α das Vektorfeld ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ das Kurvenintegral

$$\int_C g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x .$$

Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studien-gang:	

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto e^{2x+y}\,.$$

Bestimmen Sie

den Gradient von f: $\quad \operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{}$

die Hessematrix: $\quad \mathrm{H}f\,(x,y) = \boxed{}$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt $(0,0)$:

$$T_2\Big(f,(x,y),(0,0)\Big) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Folge oder Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n-1)} - n$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\,\mathrm{d}\,x$	$\displaystyle\int \frac{x}{(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$	$\displaystyle\int \sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}\,y$