# Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 240 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan(x)$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan(x)$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 15. 04. 2010 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19. 04.** bis **29. 04. 2010** mit Frau Dr. Iryna Rybak (täglich 10 Uhr - 12 Uhr, Raum V 57.7.151) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

**Aufgabe 1** (*5 Punkte*)
Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{z\pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$ die Formel

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cdots\cos\left(2^n x\right) = \frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin(x)}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der vollständigen Induktion.
Dabei dürfen Sie die folgende Gleichung, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, ohne Beweis benutzen:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).$$

---

**Aufgabe 2** (*9 Punkte*)
Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A$.

**(b)** Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.

**(c)** Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

**(d)** Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

---

**Aufgabe 3** (*10 Punkte*) Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen.

**(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

---

**Aufgabe 4** (*9 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

---

**Aufgabe 5** (*12 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\,.$$

**(a)** Bestimmen Sie die Menge $D$ der reellen Stellen $x$, an denen der Funktionsterm definiert ist. Ermitteln Sie das Verhalten von $f$ an den Polstellen.

**(b)** Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f$.

**(c)** Skizzieren Sie das Schaubild von $f$ für $x \in [-4, 4]$.

**(d)** Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von $f$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left((x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

**(e)** Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

**(f)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil **(e)**.

---

**Aufgabe 6** (*7 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{2x_1 - x_2} \begin{pmatrix} 1 + 2x_1 + 2x_2 \\ -\alpha - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und der Weg $C$, welcher geradlinig von $(1,1)$ zu $(1,3)$ läuft.

**(a)** Entscheiden Sie, für welche $\alpha$ das Vektorfeld ein Potential besitzt.

**(b)** Berechnen Sie für $\alpha = 0$ das Kurvenintegral

$$\int_C g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

---

**Aufgabe 7** (*3 Punkte*)
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto e^{2x+y}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt $(0,0)$.

---

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen von $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ in der Form $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z_1 =$ | | $z_2 =$ | |
| $z_3 =$ | | $z_4 =$ | |

**Aufgabe 9** (*5 Punkte*) Es seien $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$ zwischen $b_1$ und $b_2$.

**(b)** Bestimmen Sie $f_2 \in \mathrm{L}(b_1, b_2)$ so, dass $f_2$ normiert und senkrecht zu $b_1$ ist.

**(c)** Bestimmen Sie $f_3$ so, dass $b_1$, $f_2$, $f_3$ ein Rechtssystem bilden.

Tragen Sie die Lösungen in die folgenden Kästen ein:

$\alpha =$ $\boxed{\phantom{xx}}$, $f_2 =$ $\boxed{\phantom{xx}}$, $f_3 =$ $\boxed{\phantom{xx}}$.

**Aufgabe 10** (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Folge oder Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

| $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ | $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n-1)} - n$ | $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 11** (*6 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

| $\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\,\mathrm{d}\,x$ | $\displaystyle\int \frac{x}{(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$ | $\displaystyle\int \sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}\,y$ |
|---|---|---|
| | | |

---

**Aufgabe 12** (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto e^{(x+1)^2+y^2}$.

**(a)** Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $f$.

**(b)** Berechnen Sie die kritischen Punkte von $f$.

**(c)** Geben Sie den Typ der kritischen Punkte an.

---