Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*
Gegeben ist die Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), 0 \le r \le \varphi, 0 \le \varphi \le 4\pi\}.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von G.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Die Menge G ist bereits in einer Parametrisierung in Polarkoordinaten gegeben.

Man erkennt, die „Rand"-Kurve der Parametrisierung $t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t))$ liegt für Parameter $t \in [0, 2\pi]$ im Inneren der Menge G. Relevant für die Bestimmung der Fläche ist also nur der Bereich $t \in [2\pi, 4\pi]$.

Für den Flächeninhalt A von G gilt also:

$$\begin{aligned} A &= \int_{2\pi}^{4\pi} \int_0^{\varphi} 1 \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{2}\varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\frac{1}{6}\varphi^3\right]_{2\pi}^{4\pi} = \frac{1}{6}(64\pi^3 - 8\pi^3) = \frac{28}{3}\pi^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Die geschlossene Fläche S berandet das Gebiet

$$V := \{(x, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)+x^2) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi], x \in [-1,1]\}.$$

Weiter ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto (0,0,z).$$

Bestimmen Sie den Ausfluss $\iint_S g \bullet n \,\mathrm{d}O$ von g durch den Rand S von V.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Variante 1: Direkte Berechnung

Die Fläche S setzt sich zusammen aus den folgenden drei Flächenstücken:

$$S_1\colon \Phi_1\colon [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon (r,\varphi) \mapsto (1, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)+1)$$

$$S_2\colon \Phi_2\colon [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon (r,\varphi) \mapsto (-1, r\cos(-\varphi), r\sin(-\varphi)+1)$$
$$S_3\colon \Phi_3\colon [0,2\pi]\times[-1,1] \to \mathbb{R}^3\colon (\varphi,x) \mapsto (x, \cos(\varphi), \sin(\varphi)+x^2).$$

Die partiellen Ableitungen und die zugehörigen Normalenvektoren der einzelnen Parametrisierungen berechnen sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\Phi_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(r,\varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\Phi_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Phi_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\Phi_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin(-\varphi) \\ -r\cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Phi_2(r,\varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\Phi_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\Phi_3(\varphi,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi_3(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\Phi_3(r,\varphi) \times \frac{\partial}{\partial x}\Phi_3(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -2x\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Insbesondere erkennt man hieran, dass die angegebenen Parametrisierungen für die Berechnung des Ausflusses richtig, also nach außen orientiert sind.

Hiermit kann der Ausfluss folgendermaßen bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
\iint_S g \bullet n \,\mathrm{d}O &= \iint_{S_1} g \bullet n \,\mathrm{d}O + \iint_{S_2} g \bullet n \,\mathrm{d}O + \iint_{S_3} g \bullet n \,\mathrm{d}O \\
&= \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin(\varphi)+1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin(-\varphi)+1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r}_{=0} \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi)+x^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2x\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\sin(\varphi))^2 + \sin(\varphi)x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(\sin(\varphi))^2 x + \frac{1}{3}\sin(\varphi)x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 2(\sin(\varphi))^2 + \frac{2}{3}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \left[2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right) - \frac{2}{3}\cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi
\end{aligned}
$$

Variante 2: Mit Hilfe des Satzes von Gauß

Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\iint_S g \bullet n \,\mathrm{d}O = \iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Es ist

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = 1\,.$$

Das Gebiet V ist bereits in parametrisierter Form angegeben, allerdings nicht in kartesischen Koordinaten. Sei

$$\zeta\colon\ [0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,1] \to \mathbb{R}^3\colon\ (r,\varphi,x) \mapsto (x, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)+x^2)$$

mit zugehöriger Funktional-Determinante

$$\det J\zeta(r,\varphi,x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ 2x & \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = r\,,$$

dann kann der Ausfluss wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\iint_S g \bullet n \, \mathrm{d}O &= \iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} 1 \cdot \det J\zeta(r,\varphi,x) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \pi \, \mathrm{d}x = 2\pi \, .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(11 Punkte)*
Bestimmen Sie *alle* reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 2x + 10\cos(2x)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Teil 1: Berechnung der homogenen Lösung

Wir bestimmen zunächst die homogene Lösung.
Aus $y'' + y' = 0$ erhalten wir das charakterischtische Polynom $q(t) = t^2 + t = t(t+1)$.
Die homogene Lösung lautet somit

$$f_h(x) = c_1 + c_2 e^{-x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Teil 2: Berechnung der inhomogenen Lösung

Variante 1: Inhomogene Lösung nach Art der Rechten Seite

Nun wird die inhomogene Lösung nach Art der rechten Seite bestimmt. Ausserdem wird das Superpositionsprinzip genutzt.

Betrachte die Störfunktion $10\cos(2x)$.
Es liegt keine Resonanz vor. Der Ansatz mitsamt seinen Ableitungen lautet

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a\sin(2x) + b\cos(2x) \\ f_1'(x) &= 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) \\ f_1''(x) &= -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) + 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) &= 10\cos(2x) \\ \sin(2x)(-4a-2b) + \cos(2x)(-4b+2a) &= 10\cos(2x) \end{aligned}$$

Damit sind $a = 1$, $b = -2$ und

$$f_1(x) = \sin(2x) - 2\cos(2x)$$

Nun wird die Störfunktion $2x$ betrachtet.
Es liegt Resonanz vor mit Vielfachheit $m = 1$. Ansatz und Ableitungen sind somit

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x(cx+d) \\ f_2'(x) &= 2cx + d \\ f_2''(x) &= 2c \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2c+2cx+d=2x$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $c=1$ sowie $d=-2$ und somit

$$f_2(x)=x^2-2x$$

Die partikuläre Lösung ist

$$f_p(x)=f_1(x)+f_2(x)=\sin(2x)-2\cos(2x)+x^2-2x$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$f(x)=f_h(x)+f_p(x)=c_1+c_2e^{-x}+\sin(2x)-2\cos(2x)+x^2-2x \quad \text{mit } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Variante 2: Inhomogene Lösung mit Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix lautet

$$M(x)=\begin{pmatrix}1 & e^{-x}\\ 0 & -e^{-x}\end{pmatrix}$$

Hiermit erhalten wir den Ansatz der Variation der Konstanten

$$M(x)\cdot\begin{pmatrix}C_1'(x)\\ C_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2x+10\cos(2x)\end{pmatrix}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & e^{-x} & 0\\ 0 & -e^{-x} & 2x+10\cos(2x)\end{array}\right)$$

Dies formen wir um zu

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & e^{-x} & 0\\ 0 & 1 & -2xe^{x}-10e^{x}\cos(2x)\end{array}\right)$$

Daran kann man ablesen, dass

$$C_1(x)=\int 2x+10\cos(2x)dx$$
$$C_2(x)=-\int 2xe^x+10e^x\cos(2x)dx$$

Man sieht direkt, dass

$$C_1(x)=\int 2x+10\cos(2x)dx=\left[x^2+5\sin(2x)\right]$$

Zur Bestimmung von $C_2(x)$ seien die folgenden Stammfunktionen berechnet. Partielle Integrationen ergeben:

$$\int xe^x dx=[xe^x]-\int e^x dx=[e^x(x-1)]$$

sowie

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(2x)dx &= [e^x\cos(2x)] + 2\int e^x\sin(2x)dx \\ &= [e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x)] - 4\int e^x\cos(2x)dx\end{aligned}$$

was

$$\int e^x\cos(2x)dx = \frac{1}{5}\left[e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x)\right]$$

zur Folge hat.
Damit ist

$$C_2(x) = -2e^x\left(x - 1 + \cos(2x) + 2\sin(2x)\right)$$

Einsetzen ergibt

$$f_p(x) = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)\cdot e^{-x} = x^2 - 2x + 2 + \sin(2x) - 2\cos(2x)$$

und

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1 + c_2e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + \sin(2x) - 2\cos(2x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Für $y \neq 0$ ist die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y' = x^2 \frac{1}{y^2}\,.$$

Bestimmen Sie *die* reelle Lösung f der Differentialgleichung, welche $f(0) = 2$ erfüllt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Mit Satz 3.2.2 aus der Vorlesung, wobei $g(x) = x^2$ und $h(y) = \dfrac{1}{y^2}$ erhalten wir

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

Alternativ können wir durch Umformen und Integrieren folgern, dass

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + c \\ y &= \sqrt[3]{x^3 + c} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + c} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Das Anfangswertproblem lösen wir durch Auswertung an der Stelle $x = 0$.
Wir erhalten $\sqrt[3]{c} = 2$, also $c = 8$. Die gesuchte Lösung ist somit

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie *alle* reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y\,.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Das Differentialgleichungssystem besitzt das folgende Fundamentalsystem:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Alternative: Betrachtung als Anfangswertproblem

Wir wählen uns als Startvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$A^2v = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Diese drei Vektoren sind linear abhängig. Genauer: $A^2v - 5Av + 6v = 0$. Daraus erhalten wir das Polynom

$$q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Die zugehörige Wronskimatrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix}$$

Einsetzen ergibt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\left(M(0)^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung von Satz 6.3.4 aus der Vorlesung ist

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} - e^{3x} \end{pmatrix}$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$f_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ 2e^{2x} - 3e^{3x} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6: *(10 Punkte)*
Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{für} \quad -\pi \leq x < \pi \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

gegeben. Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Variante 1: Reelle Rechnung

Es gilt

$$b_k = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N},$$

da f eine gerade Funktion ist.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x}\cos(kx)dx \end{aligned}$$

integriere partiell

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{ke^{-x}\sin(kx) - e^{-x}\cos(kx)}{1+k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{0 - e^{-\pi}(-1)^k + 1}{1+k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2}\right) \end{aligned}$$

Es berechnet sich

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}.$$

und damit ist die relle Fourierreihe bestimmt:

$$f(x) \sim \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2}\cdot\cos(kx)\;.$$

Variante 2: Komplexe Rechnung

Möchte man bei dieser Aufgabe partielle Integration vermeiden, so bietet es sich an die komplexen Fourierkoeffizienten c_k zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ixk}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{x}e^{-ixk}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-x}e^{-ixk}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{(1-ik)x}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-(1+ik)x}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{e^{(1-ik)x}}{-1-ik}\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-(1-ik)\pi}}{1-ik} + \frac{e^{(-1-ik)\pi}-1}{-1-ik}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-\pi}(-1)^k}{1-ik} + \frac{-e^{-\pi}(-1)^k+1}{1+ik}\right) \\
&= \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}
\end{aligned}$$

Da c_k rein reell ist, gilt

$$b_k = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

(sieht man natürlich auch daran, dass f gerade ist).
Weiter ist

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) = \frac{2\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right)}{\pi(1+k^2)}$$

und

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}.$$

Damit ist die Fourierreihe S_f bestimmt:

$$f(x) \sim \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2}\cdot\cos(kx).$$