Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. M. Griesemer

Höhere Mathematik I/II — 08.03.2010

Prüfung (Nachtermin)

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, phys, mech, tpel

Vorname:	**Name:**
Matrikelnummer:	**Studiengang:**

Bitte beachten Sie unbedingt die folgenden **Hinweise:**

- Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 9** Aufgaben.
- In den **Aufgaben 1–4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den **Aufgaben 5–9** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästchen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig** !
- Zugelassene Hilfsmittel: **6 eigenhändig beschriebene Seiten im Format DIN A4** sind erlaubt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte April auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden.
  Eine Ankündigung erfolgt auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg** !

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine ebenfalls Mitte April auf der Homepage zu HM III bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Hinweis: Bei den Aufgaben auf dieser Seite sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Ergebnissen allein genügt nicht!

Aufgabe 1 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe sei mit $\wedge$ das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Die beiden Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ seien normiert und orthogonal zueinander. Außerdem sei durch

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad F(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{x})$$

eine lineare Abbildung gegeben (Ein Nachweis hierfür ist nicht nötig!).

a) Bestimmen Sie die zugehörige 3×3-Matrix A.

b) Ermitteln Sie den Kern, den Rang und die Determinante der Matrix A.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = xe^{-x}$ definiert.

a) Bestimmen Sie die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f.

b) Entwickeln Sie f um den Punkt $x_0 = 1$ in eine Taylor-Reihe.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Der Graph von f werde um die x-Achse rotiert.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ definiert.

a) Ermitteln Sie die kritischen Stellen von f und klassifizieren Sie diese.

b) Bestimmen Sie alle globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 3$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Durch die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))^\top$ wird eine Ellipse mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ parametrisiert.

a) Drücken Sie den Umfang L dieser Ellipse durch ein Integral aus.

b) Es sei $L(\delta)$ der Umfang der Ellipse im Fall $b^2 = a^2(1 + \delta)$, wobei $-1 < \delta < 1$.
Bestimmen Sie die Linearisierung $L_1(\delta)$ von $L(\delta)$ in $\delta = 0$.

Hinweis: Bei allen nachfolgenden Aufgaben genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Durch $z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}$ und $z_2 = 1 - 2i$ seien zwei komplexe Zahlen gegeben.

a) Geben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, an:

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{} \quad \text{und} \quad z_1^{2010}|z_2|^2 z_2 = \boxed{}.$$

b) Die komplexen Zahlen z_1 und $\overline{z_1}$ sind Nullstellen des Polynoms p mit $p(z) = z^4 + 6iz^3 + 17z^2 + 6iz + 16$. Finden Sie alle weiteren Nullstellen von p:

$$\boxed{}.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Betrachten Sie die rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{6x^2 - 4x + 1}{(2x^2 + 1)(x - 1)}$.

a) Geben Sie einen Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$ an:

$$\boxed{}.$$

b) Ermitteln Sie die Koeffizienten in Ihrem Ansatz und geben Sie die Funktion f als Summe ihrer Partialbrüche an:

$$f(x) = \boxed{}.$$

c) Bestimmen Sie damit

$$\int \frac{6x^2 - 4x + 1}{(2x^2 + 1)(x - 1)}\,\mathrm{d}x = \boxed{}.$$

Aufgabe 7 (7 Punkte)

a) Beantworten Sie mit „j“ für ja und „n“ für nein, ob die jeweiligen Reihen konvergent und ob sie absolut konvergent sind.

Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^2}{n^4 - e^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+2}}$
konvergent			
absolut konvergent			

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{2nx}}$ gegeben.

Das Maximum von f_n lautet $\boxed{}$.

Daher hat die Funktionenreihe $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} n\, f_n(x)$ die stärkere Konvergenzeigenschaft:

$\boxed{}$.

Aufgrund dieser Eigenschaft kann man die Reihenfolge von Integration und Bildung des Reihengrenzwertes vertauschen und erhält mit

$$\int_0^\infty n\, f_n(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{} \quad \text{dann} \quad \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)
Gegeben sei das vom reellen Parameter t abhängige lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcl} tx_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ (t^2-8)x_1 & - & tx_2 & = & 6 \end{array}\right\} (*).$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt $(*)$ genau eine Lösung? $\boxed{}$

b) $(*)$ besitzt für $t = \boxed{}$ keine Lösung und für $t = \boxed{}$ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 9 (8 Punkte)
Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Das Ziel dieser Aufgabe besteht darin, den Grenzwert a dieser Folge zu bestimmen.

a) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

Welche Beziehung besteht zwischen $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_{n+1}$ und A? $\boxed{}$.

Folglich erhält man $\mathbf{x}_n$ aus $\mathbf{x}_1$ über die Formel $\mathbf{x}_n = \boxed{}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ von A:

$$\lambda_1 = \boxed{} \text{ mit } \mathbf{v}_1 = \boxed{} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \boxed{} \text{ mit } \mathbf{v}_2 = \boxed{}.$$

c) Die Matrix $B^{-1}AB$ ist diagonal für $B = \boxed{}$ und $B^{-1} = \boxed{}$.

d) Stellen Sie den Startvektor $\mathbf{x}_1 = (2, -1)^T$ als Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ dar:

$$\mathbf{x}_1 = \boxed{}\ \mathbf{v}_1 + \boxed{}\ \mathbf{v}_2.$$

e) Geben Sie für $\mathbf{x}_n$ unter Verwendung von a), b) und d) einen expliziten Ausdruck an:

$$\mathbf{x}_n = \boxed{}.$$

f) Bestimmen Sie nun den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boxed{}$.