Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. M. Griesemer

Höhere Mathematik III **09.03.2010**

Prüfung (Haupttermin)

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, phys, mech

Vorname:	**Name:**
Matrikelnummer:	**Studiengang:**

Bitte beachten Sie unbedingt die folgenden **Hinweise:**

- Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 9** Aufgaben.
- In den **Aufgaben 1–4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den **Aufgaben 5–9** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästchen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig** !
- Zugelassene Hilfsmittel: **9 eigenhändig beschriebene Seiten im Format DIN A4** sind erlaubt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Mitte April auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden.
  Eine Ankündigung erfolgt auf der Homepage zu HM III.

  Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg** !

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine ebenfalls Mitte April auf der Homepage zu HM III bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Hinweis: Bei den Aufgaben auf dieser Seite sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Ergebnissen allein genügt nicht!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es seien $F_1 = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z=9,\ z \geq 0\}$, $F_2 = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq 9,\ z=0\}$ und $\mathbf{n}$ der Normalenvektor auf F_1 mit nichtnegativer z-Koordinate. Weiter sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+zy+y^2 \\ (1+2y-z)x \\ \sin(x^2+z^2) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{F_1} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}\sigma = \int_{F_2} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\sigma$$

und berechnen Sie den Wert des Integrals auf der rechten Seite.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x,y,z \geq 0\}$. Bestimmen Sie

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}\sigma,$$

wobei

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x+y)^2 + e^{-z^2} \\ -y^2 \\ xz \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{n}$ der nach außen weisende Normalenvektor ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+\alpha y^2), \qquad x<0,\ y \in \mathbb{R}$$

der Realteil einer analytischen Funktion $f = u + iv$?

Bestimmen Sie für diese α die Funktion v in Abhängigkeit von x und y.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie Lage und Art aller Singularitäten der folgenden Funktionen

$$f_1(z) = \frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z - \frac{2}{\pi}}, \quad f_2(z) = \frac{z^2+i}{z^4+1}$$

b) Berechnen Sie für f_2 aus Teil a) das Integral

$$\oint_{|z-6|=11/2} f_2(z)\,\mathrm{d}z.$$

c) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Bei allen nachfolgenden Aufgaben genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

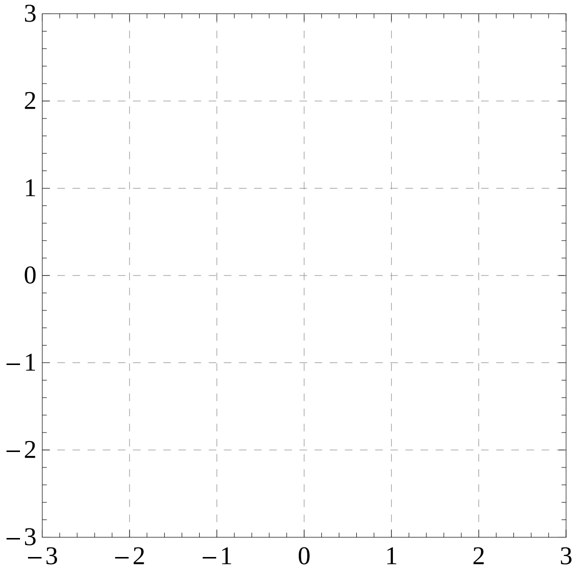
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{i}\}$ sei $f(z) = \dfrac{z^2 - i}{z^2 + i}$. Skizzieren Sie die Bilder von M_1 und M_2 unter der Abbildung f, wobei

$$M_1 = \{t + it \in \mathbb{C} \,|\, t \geq 0\}, \qquad M_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \geq 0,\, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

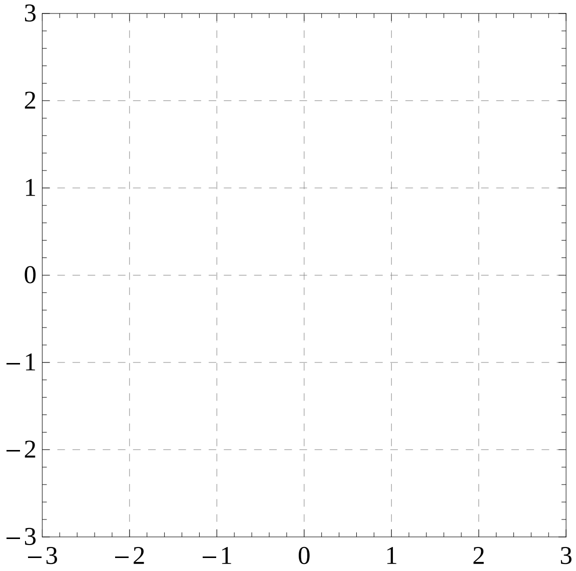
Hinweis: Schreiben Sie $f(z) = g(z^2)$ und betrachten Sie $|g(w)|$, mit $w = z^2$.

In den Skizzen ist $\operatorname{Re} z$ *nach rechts,* $\operatorname{Im} z$ *nach oben abzutragen.*

i) $f(M_1)$:



ii) $f(M_2)$:



Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -\sin(x)y^2 + \sin(x), \quad y(0) = 0.$$

$y(x) =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $X(t)$ für das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$X(t) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Folgende Aufgaben beziehen sich auf die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 15y = -65\sin(x)$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) =$ $\boxed{}$.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an:

$y_h(x) =$ $\boxed{}$.

c) Finden Sie eine partikuläre Lösung durch einen geeigneten Ansatz.

Ansatz: $\boxed{}$,

partikuläre Lösung $y_p(x) =$ $\boxed{}$.

d) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, die $y(0) = 2$ und $y'(0) = \frac{25}{2}$ erfüllt:

$y(x) =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung y der folgenden *Integrodifferentialgleichung* mit Hilfe der Laplacetransformation (dabei sei $Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$):

$$\dot{y}(t) + 3\int_0^t y(t-\tau)\cosh(2\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad y(0) = 1$$

Gleichung für $Y(s)$: $\boxed{}$

$y(t) =$ $\boxed{}$

b) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte von

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+4)} \bullet\!\!-\!\!\circ \boxed{}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

a) Entwickeln Sie die folgende Funktion um den Punkt 0 in eine Laurentreihe, welche im Punkt $z = \frac{3}{2}$ konvergiert:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},$$

Laurentreihe: $f(z) =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z - 1}{z\sin(z)\cos(z/2)}, 0\right) = \boxed{}$$