

Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur für alle gemeldeten Fachrichtungen außer Immobilientechnik und Immobilienwirtschaft

am 19.06.2009, 14.00–16.00.

Bitte unbedingt beachten:

- a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.
- b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden. Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden. Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv e^x)$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y , \sqrt{x} , $\sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse. Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten und des Betrages z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.
- c) Zugelassene Hilfsmittel: 15 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele**, Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

- a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.
- b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allinfo.pdf” im Verzeichnis “http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_WS0708/”.

Aufgabe 1

10 Punkte

Ein Betrieb besitzt zwei Abfallverbrennungsanlagen, deren Abgase die Schadstoffe A, B, C und D enthalten. Während einer Betriebsstunde verbrennt die

Anlage I 4 Tonnen Abfall und erzeugt dabei 9g Stoff A, 10g Stoff B, 4g Stoff C und 3g Stoff D,

Anlage II 10 Tonnen Abfall und erzeugt dabei 6g Stoff A, 13g Stoff B, 7g Stoff C und 11g Stoff D.

Der Betrieb darf aus beiden Anlagen zusammen täglich 54g von Stoff A, 65g von Stoff B, 28g von Stoff C und 33g von Stoff D an die Atmosphäre abgeben.

Wieviele Stunden täglich wird man die beiden Anlagen jeweils betreiben, um bei Einhaltung der Vorschriften eine möglichst große Menge Abfall zu verbrennen? Wieviele Tonnen Abfall werden dann verbrannt?

Sie dürfen dabei ohne Prüfung davon ausgehen, dass die genannten Nebenbedingungen bereits eine Betriebsstundenzahl ≤ 24 implizieren.

Hinweise: i) Für die graphische Lösung dieses Aufgabenteils steht Ihnen ein Millimeterpapierblatt zur Verfügung (Es kann aber auch anderes z.B. kariertes Papier benutzt werden). Bei Bedarf kann ein zweites zur Verfügung gestellt werden.

ii) Als “Mustergerade” für die Geraden konstanter Abfallmenge ist die Gerade für die Abfallmenge von 40 Tonnen günstig.

Aufgabe 2

14 Punkte

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{-11n^4 + 3n^2}{5n^2 + 5n}, \quad b_n := \frac{(2n + 4)^3}{7n^3 + n^2}, \quad c_n := \sqrt{16n^6 - n^4} - \sqrt{16n^6}.$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow (-3)} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$\text{mit } f(x) := \frac{-x^3 - 3x^2 + 25x + 75}{x^2 - x - 12}.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3

8 Punkte

- a) Ein Berufsanfänger verfügt am 01. Januar 2012 über ein Sparguthaben von 3 000 Euro. Zusätzlich schließt er einen Ratensparvertrag ab. Es wird ein nomineller Jahreszinssatz von 2.0% vereinbart. Über welchen Betrag kann er am 31. Dezember 2032 verfügen, wenn er vom 1. Januar 2012 bis zum 1. Juli 2032 an dem ersten Tag jedes Halbjahres 400 Euro einzahlt und wenn die Zinsen
- i) am Ende jedes Halbjahres gutgeschrieben werden?
 - ii) am Ende jedes Jahres gutgeschrieben werden?
- b) Bei welchem Jahreszinssatz wächst ein Kapital von 10 000 Euro (ohne weitere Zahlungsaktivitäten) nach 3 Jahren auf 11 000 Euro an, wenn die Zinsen am Ende jedes Jahres gutgeschrieben werden?

Aufgabe 4

4 Punkte

Ein Kredit in Höhe von 50 000 Euro soll mit einem Jahreszinssatz von 5% zurückgezahlt werden.

- a) Wie hoch ist nach 20 Jahren die Summe der angefallenen Zinsen, wenn am Ende jedes Halbjahres 1250 Euro und die angefallenen Zinsen zurückgezahlt werden?
- b) Wie hoch ist die Restschuld nach 20 Jahren, wenn am Ende jedes Halbjahres nur der Betrag von 1250 Euro zurückgezahlt wird?

Aufgabe 5

4 Punkte

In eine Anlage, die 5 Jahre lang betrieben wird, werden 50 000 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Es wird ein Jahreszinssatz von 28% zugrundegelegt. Die in den fünf Jahren erwarteten Einzahlungsüberschüsse, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen, seien alle gleich. Über welchem Wert muss der in jedem Jahr erzielte Einzahlungsüberschuss R liegen, damit sich die Investition lohnt?

Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $1/0.78 = 1.28$,

Aufgabe 6

10 Punkte

- a) Vorgegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 8x^2 - 20x + 10.$$

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend ist, und die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist. (Dabei soll jedes $x \in \mathbb{R}$ zu mindestens einem der Intervalle gehören.) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, alle Stellen, an denen $f(x)$ ein (relatives) Maximum besitzt, und alle Stellen, an denen $f(x)$ ein (relatives) Minimum besitzt.

- b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion

$$g(x) := \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x$$

auf dem Intervall $[0, 10]$.

Aufgabe 7

4 Punkte

An welcher Stelle besitzt der Graph der Funktion

$$f(x, y) := x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 2y + 10$$

eine waagerechte Tangentialebene?

Aufgabe 8

11 Punkte

- a) Berechnen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 - 24$ und $g(x) := -3x^2 + 10x$.

- b) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert, und berechnen Sie in diesem Fall seinen Wert.

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$