Universität Stuttgart Prof. Dr. K. Höllig

Diplomvorprüfung Höhere Mathematik I–III

Frühjahr 1998
2. Klausur für Studierende der Fachrichtung Physik
am 10. März 1998

Bitte unbedingt beachten:

- Verlangt und gewertet werden **alle** der folgenden 9 Aufgaben. (Bearbeitungszeit: 180 Minuten).
- Als Hilfsmittel sind 30 vom Kandidaten persönlich beschriebene Blätter zugelassen. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher und elektronische Rechengeräte.
- **Falls in der Aufgabe nicht anders verlangt, sind die Lösungswege anzugeben. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.**

Hinweise für Wiederholer:

- Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis. Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 27. 4. 1998 durch Aushang in V57, 8. Stock, bekanntgegeben.
- Wiederholer, bei denen die Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird, müssen sich bis zum 6. 5. 1998 im Sekretariat des 2. Lehrstuhls des Mathematischen Instituts A, V57 8–162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung geben lassen. Eine individuelle schriftliche Einladung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich zu den angegebenen Terminen über das Ergebnis der schriftlichen Wiederholungsprüfung zu informieren und sich gegebenenfalls zu dem vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
- Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.
(**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) $A \times B \times A = \underline{0}$

b) $(\det A)(\det B) \neq 0 \Rightarrow A + B$ ist invertierbar

c) $\operatorname{grad} \sin(x - 2y) = \cos(x - 2y)[1,\ -2]$

d) Alle Lösungen der Differentialgleichung $x''(t) + 20x'(t) + 100x(t) = 0$ streben gegen 0 für $t \to \infty$.

e) $f(z) = x^2 + y^2,\ z = x + iy$, ist komplex differenzierbar.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Bestimmen Sie:

a) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \exp(\lambda\, t)}{\ln(1-t)}$

b) $\dfrac{\partial}{\partial x_1} \langle A\,, B \times X \rangle$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

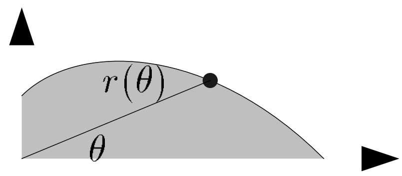
d) $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant b}} |x\, y\, z|\, dx\, dy\, dz$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Geben Sie eine Formel für den Abstand eines Punktes X von der Geraden $\mathcal{G}$: $t(1,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$ an und beschreiben Sie den Zylinder mit Achse $\mathcal{G}$ und Radius 1 durch eine Gleichung $f(X) = 0$. Geben Sie ebenfalls eine Gleichung für die Quadrik an, die durch Schnitt mit der x_1, x_2-Ebene entsteht. Bestimmen Sie deren Typ und die Richtungen der Hauptachsen.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der durch $r(\theta) = \exp(-\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ beschriebenen Kurve sowie den Inhalt der Fläche, den sie mit den Achsen einschließt.



Aufgabe 5 (15 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichungen:

a) $x' + 2x = \exp(-2t), \quad x(0) = 3$

b) $x' = t \exp(x), \quad x(0) = 1$

c) $x'' + x = \cos(2t), \quad x(0) = p, \quad x'(0) = 0\,.$

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Bestimmen Sie die Residuen von $f(z) = \dfrac{1+z^4}{z^3 - z^2}$ an den Polstellen $z = 0$ und $z = 1$.
Welche Werte kann $\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz$ für einen entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Kreis, der nicht durch die Polstellen verläuft, annehmen?

Aufgabe 7 **(15 Punkte)**

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. (**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) $\operatorname{rot}\,[x_1, x_2, x_3]^t = \underline{0}$

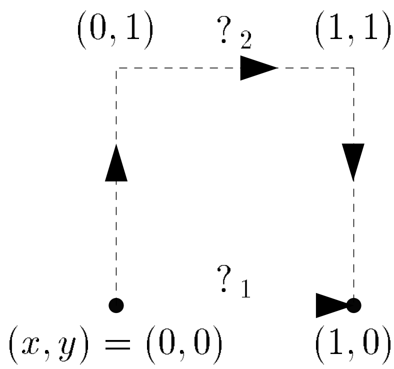
b) $t = 0$ ist ein regulär singulärer Punkt der Differentialgleichung $x''(t) = x(t)/t^3$.

c) Der Fluß von grad f durch jede geschlossene Fläche ist 0.

d) Das Vektorfeld $[x+y, x]^t$ besitzt eine Stammfunktion.

e) Die Fourier-Transformation einer reellen Funktion ist reell.

Aufgabe 8 **(15 Punkte)**

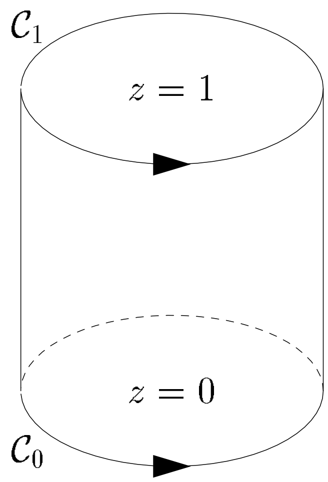


Zeigen Sie, daß das Vektorfeld

$$F = [x^3 - 3xy^2, -3x^2y + y^3]$$

quellen- und wirbelfrei ist. Berechnen Sie die Arbeits- und die Flußintegrale des Feldes sowohl für den Weg $?_1$ als auch für $?_2$.

Aufgabe 9 **(20 Punkte)**



Bestimmen Sie die Rotation R des Vektorfeldes

$$F = \left[-y(1+x^2)^z, x(1+y^2)^z, 0\right]$$

und berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int\limits_{\mathcal{C}_j} F\,dX$ für beide Randkurven $\mathcal{C}_j$ sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluß von R nach außen durch jede der Randflächen (Boden, Deckfläche, Mantel) des Zylinders

$$\mathcal{Z} : x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \,.$$