

# Statistik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 31.07.2009, 09.00–12.00.

## Bitte unbedingt beachten:

- a) Gewertet werden alle 13 gestellten Aufgaben.
- b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden. Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden. Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ( $\exp x (\equiv e^x)$ ,  $\ln x$ ,  $\log x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $x^y$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[y]{x}$ ) nötig wäre. Z.B. wären  $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$  oder  $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$  gültige Endergebnisse. Die Bildung von  $m!$  und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.
- c) Zugelassene Hilfsmittel: 40 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele**, Fremdsprachenwörterbücher ohne zusätzliche Einträge, Tabelle der Standardnormalverteilung ohne zusätzliche Einträge, Tabelle der Quantile der  $\chi^2$ -Verteilung ohne zusätzliche Einträge, Tabelle der Quantile der  $t$ -Verteilung ohne zusätzliche Einträge.

## Weitere Hinweise:

- a) Wer mindestens 45 Punkte erreicht hat, hat bestanden.
- b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File "allinfo.pdf" im Verzeichnis "[http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiSBa\\_Kolbe\\_SS09/](http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiSBa_Kolbe_SS09/)".

**Aufgabe 1**

**7 Punkte**

5 Parteien eines Mehrfamilienhauses hatten folgende Jahreseinkommen in Tausend Euro: 30, 20, 60, 40, 50.

Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve und bestimmen Sie den normierten Gini-Koeffizienten.

**Aufgabe 2**

**6 Punkte**

In einem Betrieb wurden 2008 die Artikel C und D neu eingeführt:

Artikel	2007		2008		2009	
	Stückpreis in Euro	Stückzahl	Stückpreis in Euro	Stückzahl	Stückpreis in Euro	Stückzahl
A	15.–	2000	30.–	2000	35.–	2200
B	20.–	3000	25.–	3000	27.–	2800
C	×	—	30.–	1000	33.–	2000
D	×	—	15.–	500	16.–	800

Beschreiben Sie die Preisentwicklung (nicht bei den einzelnen Artikeln, sondern bei dem Gesamtbetrieb) von 2007 nach 2008 und von 2007 nach 2009 durch die Bestimmung je eines geeigneten Indexes.

**Aufgabe 3**

**14 Punkte**

Vorgegeben sei folgende Zeitreihe:

$t_i = i$	1	2	3
$y_i$	4	-5	2

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a$  und  $b$  der linearen Trendschätzfunktion  $T^*(t) = a + b \cdot t$ .
- b) Geben Sie für die parabolischen Trendschätzfunktion  $T^*(t) = a' + b' \cdot t + c' \cdot t^2$  ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten  $a'$ ,  $b'$  und  $c'$  an. Es sind also die Elemente der Koeffizientenmatrix und die Koordinaten des Störvektors zu bestimmen. Eine Lösung des lineares Gleichungssystems ist *nicht* verlangt.

**Aufgabe 4**

**8 Punkte**

Zu drei Merkmalen liegen Daten aus 4 Beobachtungen vor.

$i$	1	2	3	4
$x_i$	1	4	6	1
$y_i$	6	4	-2	2
$z_i$	2	3	1	0

Geben Sie für die Regressionsebene  $z = a_1 + b_1x + c_1y$  ein lineares Gleichungssystem für  $a_1$ ,  $b_1$  und  $c_1$  an. Es sind also die Elemente der Koeffizientenmatrix und die Koordinaten des Störvektors zu bestimmen. Eine Lösung des lineares Gleichungssystems ist *nicht* verlangt.

**Aufgabe 5**

**4 Punkte**

Eine Softwarefirma hat sieben Mitarbeiter im Außendienst. Vier ihrer Kunden brauchen Hilfe. Zu diesen vier Kunden wird je ein Mitarbeiter geschickt, wobei also kein Mitarbeiter mehr als einen Kunden berät.

- a) Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, wenn es nicht gleichgültig ist, wer welchen Kunden berät?
- b) Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, wenn es nicht gleichgültig ist, wer welchen Kunden berät und wenn zu einem besonders schwierigen Kunden der Mitarbeiter mit der meisten Erfahrung geschickt werden soll?

**Aufgabe 6**

**8 Punkte**

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit vier idealen Würfeln mindestens eine “2” oder eine “5” zu erhalten (d.h. mindestens ein Würfel zeigt eine “2” oder eine “5”)?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit vier idealen Würfeln mindestens zwei Würfel die gleiche Augenzahl haben?

– bitte wenden –

**Aufgabe 7**

**9 Punkte**

Der Innendurchmesser eines Kolbenringes ist eine Zufallsvariable  $X$ , welche normalverteilt ist, mit Erwartungswert 10cm und Standardabweichung 0.03cm.

- (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet der Innendurchmesser des Ringes 10.075cm?
- (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kolbenring einen Innendurchmesser hat, dessen Länge zwischen 9.97cm und 10.03cm beträgt?
- (iii) Unter welchem Wert liegt der Innendurchmesser des Ringes mit der Wahrscheinlichkeit von 0.512?

**Aufgabe 8**

**9 Punkte**

Die Fremdenlegion setzt für eine bestimmte Mission weltweit 10000 Männer ein. Durch eine Umfrage soll festgestellt werden, wieviele davon aus den (ehemaligen) Kolonien Frankreichs stammen. Bestimmen Sie dazu ein 90%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Anteil  $p$  dieser Soldaten, wenn bei einer Stichprobe von 400 Legionären, welche “ohne Zurücklegen” zufällig ausgewählt wird, 50 davon aus den Kolonien stammten.

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind). Bei zwei zur Verfügung stehenden Näherungsformeln, genügt es, die **einfachere** (und gröbere) zu verwenden.

**Aufgabe 9**

**12 Punkte**

Seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen, über deren gemeinsame Verteilung Folgendes bekannt ist:

$\downarrow X Y \rightarrow$	-1	0	2	
-2	0.1	*	*	*
0	*	*	0.2	*
2	*	0.1	0.15	0.5
	0.4	*	0.4	*

Außerdem sei noch der Erwartungswert  $E(X + 2Y) = 1.4$  gegeben.

- (i) Ergänzen Sie die Tabelle mit den fehlenden Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung und der entsprechenden Randverteilungen.
- (ii) Überprüfen Sie, ob  $X$  und  $Y$  korreliert sind. Falls ja, um welche Art von Korrelation (positiv oder negativ) handelt es sich?
- (iii) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis.* Bei (ii) ist die genaue Berechnung des Korrelationskoeffizienten nicht nötig, die Kovarianz reicht.

**Aufgabe 10**

**7 Punkte**

Ein Sportartikelhersteller behauptet eine neue Angelleine zu produzieren, welche einem Gewicht von durchschnittlich bis zu 8kg standhält, mit einer Standardabweichung von 0.5kg. Testen Sie die Hypothese

$$H_0 : \quad \mu \leq 8$$

gegen die Hypothese

$$H_1 : \quad \mu > 8,$$

wenn eine Stichprobe von 25 Angelleinen analysiert wurde, welche im Mittel unter einer Last von 7.8kg nachgaben. Benutzen Sie für  $H_0$  eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0.01$  und für  $H_1$  eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\beta = 0.05$ .

**Aufgabe 11**

**6 Punkte**

In einer Legebatterie wird eine bestimmte Rasse von Hennen gehalten. Das Gewicht der von ihnen gelegten Eier ist eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und unbekannter Standardabweichung  $\sigma$ .

Gesunde Hennen legen Eier, deren Gewicht ungefähr 20 g beträgt. Der Besitzer der Legebatterie hat den Verdacht, dass etliche seiner Hühner diese Norm nicht einhalten. Bevor er ihnen eine Vitaminkur verordnet, die zu einer normgerechten Eierproduktion verhelfen soll, möchte er seinen Verdacht überprüfen. Er wählt zufällig  $n = 25$  Hennen aus dem Stall und wiegt deren Eier. Dabei kommt er auf einen Durchschnittswert von 12 g. Sei  $\alpha = 0.2$  die Wahrscheinlichkeit, dass er irrtümlich seine Hennen für kurreif hält.

Testen Sie mit Hilfe der gegebenen Daten die Hypothese:

$$H_0: \text{ Der Bauer hat Unrecht, d.h. } \mu = 20 .$$

*Hinweis:* Zur Vereinfachung der Rechnungen wird noch  $\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 2400$  gegeben.

– bitte wenden –

**Aufgabe 12**

**8 Punkte**

Eine Lieferung von 200 000 Stück soll höchstens 1% defekte Stücke enthalten. Für die Wahrscheinlichkeit  $p$  für die Ziehung eines defekten Stückes soll also die Hypothese  $H_0 : p \leq 0.03$  (etwa) gegen die Hypothese  $H_1 : p \geq 0.031$  getestet werden, und zwar mit 0.01 für die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art.

- a) Es werden 50 zufällige Ziehungen m.Z. durchgeführt. Zu welchem Testergebnis kommen Sie, wenn dreimal ein defektes Stück gezogen wird?

*Benötigte Rechenergebnisse:*  $0.99/(0.97^{50}) = 4.540$ ,  $150/97 = 1.546$

und  $25 \cdot 49 \cdot 9/(97^2) = 1.172$

- b) Über welchem Wert  $u$  muss bei einer evtl. zweiten Stichprobe der Stichprobenumfang liegen, damit die Hypothese  $H_1$  überhaupt mit ausreichender Sicherheit abgelehnt werden kann?

**Aufgabe 13**

**7 Punkte**

Zu prüfen ist bei einem realen Würfel die Hypothese

$H_0$ : Alle Seiten haben die gleiche Wahrscheinlichkeit  $1/6$ .

Die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Ablehnung von  $H_0$  sei  $\alpha = 0.10$ .

Der Würfel wird nun 60mal geworfen mit folgenden Ergebnissen:

Augenzahl $k$	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit $f_k$	12	12	12	12	6	6

Was kann man aus diesen Ergebnissen schliessen?

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).