Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 15.01.2010, 13.30 – 16.30.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle 12 gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 50 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 45 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS09/`”.

c) Einige Werte trigonometrischer Funktionen:
$\sin(k\pi) = 0,\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2},\ \sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$,
$\cos(2\pi/3) = -1/2,\ \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2.$

Aufgabe 1 **5 Punkte**

Ein Absolvent der Universität Stuttgart verfügt am 1. Januar 2011 über ein Sparguthaben von 2000 Euro. Zusätzlich schließt er einen Ratensparvertrag ab. Es wird ein nomineller Jahreszinssatz von 6% vereinbart.

a) Über welchen Betrag kann er am 31. Dezember 2018 verfügen, wenn er vom 1. Januar 2011 bis zum 1. Dezember 2018 an dem ersten Tag jedes Monats 150 Euro einzahlt und wenn die Zinsen am Ende jedes Monats gutgeschrieben werden?

b) Welchen festen Betrag muss er vom 1. Januar 2011 bis zum 1. Dezember 2018 an dem ersten Tag jedes Monats einzahlen, damit er am 31. Dezember 2018 über einen Betrag von 23 000 Euro verfügen kann, wenn die Zinsen am Ende jeden Monats gutgeschrieben werden?

Aufgabe 2 **4 Punkte**

In eine Anlage, die zwei Jahre lang betrieben wird, werden 24 444.44 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Im ersten Betriebsjahr wird ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 30 000 Euro erzielt, im zweiten ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 10 000 Euro, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen. Wie hoch ist der interne Zinssatz (d.h. der Zinsatz unter dem ein Kreditszinssatz unbedingt bleiben muss)?
Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $24\,444.44 = 10\,000 \cdot \frac{22}{9}$; $\quad 13^2 = 88 + 81$

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{n^6 - 2n^2 + 1}{(n^3+5)^2}, \quad b_n := \sqrt{5n^4 + n^2} - \sqrt{5n^4 - n^2 - n}.$$

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und den Winkel zwischen ihnen. Bestimmen Sie außerdem einen Vektor **c**, der zu **a** und **b** orthogonal ist und das Volumen des von den drei Vektoren **a**, **b**, **c** aufgespannten Spats.

Aufgabe 5 **12 Punkte**

Ein Monopol sieht sich einer Nachfrage $N(p) = 16 \cdot p^{-2}$, $p > 0$, gegenüber, auf die es seine Produktion genau einstellen will, d.h. die produzierte Menge ist $q = N(p)$. Die Kostenfunktion sei

$$K(q) := \begin{cases} 2 + 2\,q & \text{für} \quad 0 \le q \le \dfrac{9}{4}\,, \\[2ex] 8 + q & \text{für} \quad \dfrac{9}{4} < q \le \dfrac{25}{9}\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $p = N^{-1}(q)$ der Funktion $q = N(p)$, und prüfen Sie, ob es einen Preis p gibt, für den der Gewinn $(p \cdot q - K)$ maximal wird, und bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Preis.
Hinweis: Untersuchen Sie zuerst $g(q)$, also den Gewinn als Funktion von q.

Aufgabe 6 **11 Punkte**

a) Berechnen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 + 7x$ und $g(x) := -7x^2 + 15$.

b) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert, und berechnen Sie in diesem Fall seinen Wert.

$$\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 7 **13 Punkte**

Für welche(n) Wert(e) des Parameters p besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrl} -x_1 & +3\,x_2 & -3\,x_3 & = 2 \\ -5\,x_1 & +(p+5)\,x_2 & +(p-5)\,x_3 & = (-p+21) \\ 2\,x_1 & -8\,x_2 & +(p+16)\,x_3 & = -1 \end{array}$$

i) eine (i.a. von p abhängige) eindeutige Lösung,

ii) mehr als eine Lösung,

iii) keine Lösung?

Bestimmen Sie im Fall **ii)** die Lösungsmenge (oder die allgemeine Lösung) des obigen linearen Geichungssystems.

Bestimmen Sie für $p = -9$ die Lösung des obigen linearen Gleichungssystems.

Rechenergebnis (zur evtl. Vereinfachung der Zahlenrechnung): $18^2 = 324$.

Aufgabe 8 **3 Punkte**

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (wobei auch ∞ als Grenzwert zugelassen ist):

$$\lim_{x\to 1} x^{1/\ln(2x)}.$$

Aufgabe 9 **11 Punkte**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) := 2x^2 + 4y^2 + 2xy^2$ auf relative Extrema einschließlich der Klärung, ob es sich um ein relatives Maximum oder Minimum handelt.

Aufgabe 10 **11 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = 39\cos x\,.$$

Aufgabe 11 **10 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differenzengleichung:

$$y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 42 \cdot 4^n\,.$$

Aufgabe 12 **6 Punkte**

Gegeben seien die Ebene

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Gerade

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie ...

a) ... die Gleichungsdarstellung der Ebene E.

b) ... den gemeinsamen Punkt der Geraden g und der Ebene E.