Prof. Dr. Klaus Höllig 14. Oktober 2010

Klausur zu Grundlagen der Computermathematik

Lösungen

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

a) Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert, wenn die Beträge der Eigenwerte von A kleiner als 1 sind.

b) Die eine Householder-Transformation beschreibende Matrix ist symmetrisch.

c) Der Spektralradius der Iterationsmatrix Q des Gauß-Seidel Verfahrens ist für alle symmetrischen, positiv definiten Matrizen A kleiner als 1.

d) Ein lineares Programm mit beschränkter, nicht leerer zulässiger Menge besitzt mindestens eine Lösung.

e) Ein Ausgleichsproblem ist immer eindeutig lösbar.

Lösung

a) falsch: $A = \operatorname{diag}(1/2, -1/2)$, $x = (1, -1)^{\mathrm{t}}$

b) richtig: $(E - dd^{\mathrm{t}}/r)^{\mathrm{t}} = E - d^{\mathrm{tt}} d^{\mathrm{t}}/r$

c) richtig, das Gauß-Seidel Verfahren konvergiert für symmetrische, positiv definite Matrizen A und daher muß der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner als 1 sein.

d) richtig: Jede stetige Funktion nimmt auf einer beschränkten kompakten Menge ihr Minimum an.

e) falsch: Die Lösung ist nur bis auf Addition eines Vektors im Kern der Koeffizientenmatrix eindeutig.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form, $A = \sum_{k=1}^{\operatorname{Rang} A} u_k \sigma_k v_k^{\mathrm{t}}$, sowie deren Pseudoinverse.

Lösung

$$A^{\mathrm{t}} A = \begin{pmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Rang} A = 1 \rightsquigarrow \sigma_1 = \sqrt{\operatorname{Spur} A} = \sqrt{30}$

$v_1 \perp \operatorname{Kern} A = \operatorname{Spann}(1,\, -2)^{\mathrm{t}} \rightsquigarrow v_1 = (2,\, 1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{5}$

$$u_1 = A v_1/\sigma_1 = (5,\, 10,\, 5)^{\mathrm{t}}/\sqrt{150} = (1,\, 2,\, 1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{6}$$

Pseudoinverse

$$A^{+} = v_1 \sigma_1^{-1} u_1^{\mathrm{t}} = \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (5,\, 10,\, 5) = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein Matlab-Programm `function x = solve(u,v,b)`, das ein lineares Gleichungssystem $R^{\mathrm{t}}Rx = b$ für eine nicht-singuläre obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & & 0 \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & & & u_n \end{pmatrix}$$

löst.

Lösung

Zunächst wird $R^{\mathrm{t}}y = b$ mit Vorwärtseinsetzen gelöst

$$y(1) = b(1)/u(1)\,, \quad y(k) = (b(k) - v(k-1)y(k-1))/u(k)$$

und dann $R^{\mathrm{t}}x = y$ mit Rückwärtseinsetzen

$$x(n) = y(n)/u(n)\,, \quad x(k) = (y(k) - v(k)x(k+1))/u(k)\,.$$

Dabei kann auch bereits beim ersten Schritt der Vektor x verwendet werden, der dann in der zweiten Schleife überschrieben wird, weil jeweils nur auf noch nicht überschriebene Werte zugegriffen wird.

```
function x = solve(u,v,b)

n = length(b);
x(1) = b(1)/u(1);
for k = 2:n
   x(k) = (b(k) -  v(k-1)*x(k-1))/u(k);
end
x(n) = x(n)/u(n);
for k = n-1:-1:1
   x(k) = (x(k)-v(k)*x(k+1))/u(k);
end
```

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $u = (0,\, 0)^{\mathrm{t}} \to v$ der Jacobi-Iteration durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix und geben Sie die Maximum-Norm des Fehlers zur exakten Lösung $(1,\, 1)^{\mathrm{t}}$ nach 10 Schritten an.

Lösung

Iterationsschritt

$$\begin{aligned} v_1 &= (3 - 1 \cdot 0)/2 = 3/2 \\ v_2 &= (3 - 1 \cdot 0)/2 = 3/2 \end{aligned}$$

Iterationsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $-1/2$ und $1/2$ mit Eigenvektoren

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektorzerlegung des Startfehlers

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = -\xi$$

$\rightsquigarrow \Delta_{10} = -(-1/2)^{10}\xi = (-1,\, -1)^{\mathrm{t}}/1024 \Rightarrow \|\Delta_{10}\|_\infty = 1/1024$

Aufgabe 5

Bringen Sie das Optimierungsproblem

$$x_1 - \alpha x_2 \to \min, \quad 2x_2 - 1 \le x_1 \le 3\,,\; x_k \ge 0$$

durch Einführung von zwei Schlupfvariablen x_3 und x_4 auf Standardform. Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen und das Minimum der Zielfunktion in Abhängigkeit von $\alpha > 0$.

Lösung

Nebenbedingungen

$$x_1 + x_3 = 3, \quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$$

$\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^{\mathrm{t}} & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -\alpha & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Basislösungen und Zielfunktionswerte

$$\begin{array}{lrrrrll} (& 3, & 2, & 0, & 0 &), & 3-2\alpha \\ (& -1, & 0, & 4, & 0 &), & \text{nicht zulässig} \\ (& 3, & 0, & 0, & 4 &), & 3 \\ (& 0, & 1/2, & 3, & 0 &), & -\alpha/2 \\ (& 0, & 0, & 3, & 1 &), & 0 \end{array}$$

Minimum: $-\alpha/2$ für $0 < \alpha \le 2$ und $3 - 2\alpha$ für $\alpha \ge 2$

Aufgabe 6 Transformieren Sie die 3×3-Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

durch eine Householdertransformation der letzten beiden Zeilen auf obere Dreiecksform und geben Sie die 2×2 Transformationsmatrix in der faktorisierten Form $E - \frac{1}{r}\, dd^{\mathrm{t}}$ an. Bestimmen Sie ebenfalls die Lösung x des Ausgleichsproblems $e = \|Ax - b\|_2 \to \min$ und geben Sie auch den Fehler e an.

Lösung

Die Householder-Transformation wird auf die unteren beiden Zeilen angewandt, und basiert auf dem Vektor $(3, -4)^{\mathrm{t}}$ mit der Norm 5. Folglich ist

$$d = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r = \|c\|_2 d_1 = 40\,.$$

Mit

$$d^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 40\,, \quad E \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{40}{40} d = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Dreiecksform

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

aus der sich die Ausgleichslösung ablesen lässt:

$$x_2 = 3/5\,, \quad x_1 = 6/5\,.$$

Der Fehler ist $e = 4$.