Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Gegeben sei die parametrisierte Fläche A mit

$$A = \left\{ \Phi(u,v) = \left(uv, \frac{v}{u} \right) \in \mathbb{R}^2 : u \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right], v \in [1,2] \right\}.$$

a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante von Φ.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von A.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes von A.

d) Die Fläche A wird nun entweder um die x- oder um die y-Achse rotiert. Sind die Volumina der entstehenden Rotationskörper gleich groß? Wenn nein, für welche Achse ist das Volumen größer?

---

a) Jacobi-Matrix der Parametrisierung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} v & u \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}, \qquad \det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial(u,v)} \right) = 2\frac{v}{u}.$$

b) Flächeninhalt:

$$|A| = \int_A 1\, d(x,y) = \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_1^2 2\frac{v}{u}\, dv\, du = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u}\, du \int_1^2 2v\, dv = [\ln u]_{\frac{1}{2}}^2 \left[v^2\right]_1^2 = 6\ln 2.$$

c) x-Koordinate des Schwerpunkts:

$$x_S = \frac{1}{6\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_1^2 uv \cdot 2\frac{v}{u}\, dv\, du = \frac{1}{6\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^2 1\, du \int_1^2 2v^2\, dv = \frac{1}{6\ln 2} \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} v^3 \right]_1^2 = \frac{7}{6\ln 2}.$$

y-Koordinate des Schwerpunkts:

$$y_S = \frac{1}{6\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_1^2 \frac{v}{u} \cdot 2\frac{v}{u}\, dv\, du = \frac{1}{6\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u^2}\, du \int_1^2 2v^2\, dv = \frac{1}{6\ln 2} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{2}{3} v^3 \right]_1^2 = \frac{7}{6\ln 2}.$$

d) Das Volumen der Rotationskörper lässt sich mit der Guldinschen Regel zu $V = 2\pi d|A|$ berechnen, wobei d der Abstand des Schwerpunkts zur Drehachse ist.
Wegen $x_S = y_S$ sind die Volumina gleich.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-x} - 1 \\ 3x \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ergibt

$$\begin{aligned} p(z) &= (-2-z)(-2-z) - 1 \\ &= z^2 + 4z + 3 \\ &= (z+1)(z+3). \end{aligned}$$

Damit sind $z_1 = -3$, $z_2 = -1$ die gesuchten Nullstellen von $p(z)$.

Die zugehörigen Eigenvektoren v^1 und v^2 ergeben sich zu

$$\begin{aligned} z_1 = -3: &\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ z_2 = -1: &\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem lautet also

$$\left\{y^1(x), y^2(x)\right\} = \left\{ e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und die homogene Lösung ist gegeben durch

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die Partikulärlösung ergibt der Ansatz der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = c_1(x) e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise ist das

$$y_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{-x} \\ -e^{-3x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich das LGS

$$\begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{-x} \\ -e^{-3x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-x} - 1 \\ 3x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{-3x} & 0 \\ 0 & 2e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-x} - 1 - 3x \\ 2\mathrm{e}^{-x} - 1 + 3x \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{3x} - \frac{1}{2}e^{3x}, \\ c_2'(x) &= 1 + \frac{3}{2}xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x}. \end{aligned}$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{3x}, \\ c_2(x) &= x + \frac{3}{2}xe^{x} - 2e^{x}, \end{aligned}$$

und damit die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)y^1(x) + c_2(x)y^2(x) \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(xe^{-x} + \frac{3}{2}x - 2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= xe^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = c_1e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + xe^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Die 1-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{e-1}e^x - 1, \quad x \in [0,1).$$

a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe von f.

b) Geben Sie die reelle Fourier-Reihe von f an.

c) Geben Sie die reelle Fourier-Reihe einer Stammfunktion F von f an.

---

a) Die komplexe Fourier–Reihe lautet

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
n = 0: \quad c_0 &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{e-1}e^x - 1\right)dx = \frac{e-1}{e-1} - 1 = 0. \\
n \neq 0: \quad c_n &= \int_0^1 f(x)e^{-i2\pi nx}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{e-1}e^{(1-i2\pi n)x} - e^{-i2\pi nx}\right)dx \\
&= \frac{1}{1-i2\pi n}\left[\frac{1}{e-1}e^{(1-i2\pi n)x}\right]_0^1 - \frac{1}{-i2\pi n}\left[e^{-i2\pi nx}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1-i2\pi n} \cdot \frac{e^{1-i2\pi n}-1}{e-1} = \frac{1}{1-i2\pi n}.
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die Fourier–Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{1-i2\pi n}e^{i2\pi nx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i2\pi n}e^{-i2\pi nx} + \frac{1}{1-i2\pi n}e^{i2\pi nx}\right)$$

b) Es gilt

$$c_n = \frac{1+i2\pi n}{1+(2\pi n)^2}.$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe zu

$$\begin{aligned}
a_0 = c_0 = 0, \quad a_n &= 2\,\mathrm{Re}(c_n) = \frac{2}{1+(2\pi n)^2}, \\
b_n &= -2\,\mathrm{Im}(c_n) = -\frac{4\pi n}{1+(2\pi n)^2},
\end{aligned}$$

und die Reihe lautet

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+(2\pi n)^2}\cos(2\pi nx) - \frac{4\pi n}{1+(2\pi n)^2}\sin(2\pi nx)\right).$$

c) Für eine Stammfunktion F von f erhalten wir durch gliedweise Integration

$$\begin{aligned}
F(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi n}\frac{2}{1+(2\pi n)^2}\sin(2\pi nx) + \frac{1}{2\pi n}\frac{4\pi n}{1+(2\pi n)^2}\cos(2\pi nx)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+(2\pi n)^2}\cos(2\pi nx) + \frac{2}{2\pi n+(2\pi n)^3}\sin(2\pi nx)\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*14 Punkte*)

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\partial_{xx}u(x,y) + \partial_{yy}u(x,y) - 4\partial_x u(x,y) + 4u(x,y) = 0\,, \quad x,y \in (0,1), \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0,y) = u(1,y) = 0\,, \quad y \in (0,1), \tag{2}$$

$$u(x,0) = e^{2x}\sin(\pi x), \quad u(x,1) = e^{2x+\pi}\sin(\pi x)\,, \quad x \in (0,1)\,. \tag{3}$$

a) Lösen Sie die Gleichung (1) mit den Randbedingungen (2) durch den Separationsansatz.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Lösung aus a), so dass die Randbedingungen (3) erfüllt sind.

---

a) Der Separationsansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ liefert die Gleichung

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} - 4\frac{v'(x)}{v(x)} + 4 = 0,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{v''(x)}{v(x)} - 4\frac{v'(x)}{v(x)} + 4 = -\frac{w''(y)}{w(y)} = c$$

und damit die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v''(x) - 4v'(x) + (4-c)v(x) = 0, \qquad w''(y) + cw(y) = 0.$$

Die Differentialgleichung für v liefert das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4 - c$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{c}.$$

Fallunterscheidung für c:

(i) Falls $c = l^2 > 0$:
Allgemeine Lösung der Dgl :

$$v(x) = a\mathrm{e}^{(2+l)x} + b\mathrm{e}^{(2-l)x}, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Randbedingungen ergibt $a = b = 0$ und damit keine interessante Lösung.

(ii) Falls $c = 0$:
Allgemeine Lösung der Dgl :

$$v(x) = ae^{2x} + bxe^{2x}.$$

Wieder ergibt das Einsetzen der Randbedingungen $a = b = 0$.

(*iii*) Falls $c = -l^2 < 0$:

$$v(x) = ae^{2x}\cos(lx) + be^{2x}\sin(lx).$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\begin{aligned} v(0) &= a = 0, \\ v(1) &= be^2\sin(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \text{ oder } l = n\pi,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Lösungen gegeben durch

$$v_n(x) = \hat{b}_n e^{2x}\sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für w erhält man damit die Differentialgleichungen

$$w_n''(y) = -c_n w_n(y) = n^2\pi^2 w_n(y)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w_n(y) = \tilde{a}_n e^{-n\pi y} + \tilde{b}_n e^{n\pi y}.$$

Superposition ergibt

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2x}\sin(n\pi x)\left(a_n e^{-n\pi y} + b_n e^{n\pi y}\right).$$

b) Das Einsetzen der Randbedingungen führt auf

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2x}\sin(n\pi x)\,(a_n + b_n) \overset{!}{=} e^{2x}\sin(\pi x), \\ u(x,1) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2x}\sin(n\pi x)\left(a_n e^{-n\pi} + b_n e^{n\pi}\right) \overset{!}{=} e^{2x+\pi}\sin(\pi x), \end{aligned}$$

und damit auf

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 1 \\ a_1 e^{-\pi} + b_1 e^{\pi} &= e^{\pi}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &a_1 = 0,\ b_1 = 1 \\ &a_n = b_n = 0,\ \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Damit ist die Gesamtlösung

$$u(x,y) = e^{2x}\sin(\pi x)e^{\pi y}.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

$$P(\overline{B}) = 0.4, \quad P(A \cap B) = 0.3, \quad P(A \cup B) = 0.8.$$

Sind die Ereignisse A und B unabhängig?

Die Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gilt.

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= 0.4 \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0.6 \\ P(A) &= P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 0.8 - 0.6 + 0.3 = 0.5 \\ P(A)P(B) &= 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 = P(A \cap B) \checkmark \end{aligned}$$

Also sind die Ereignisse unabhängig.

Aufgabe 6 (*9 Punkte*)

Ein zylindrisches Präzisionsteil besitze die gewünschte Qualität, wenn die Abweichung des Durchmessers vom Nennmaß μ dem Betrage nach nicht größer als 3.3mm ist. Der Herstellungsprozess sei so beschaffen, dass der Durchmesser des Teils eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-normalverteilte Zufallsgröße mit der Standardabweichung $\sigma = 3$mm ist.

a) Wieviel Prozent der Teile einer Serie werden durchschnittlich mit der gewünschten Qualität produziert?

b) Wie groß darf die Standardabweichung sein, damit weniger als 10% Ausschuss entsteht?

---

a)

$$X \,\widehat{=}\, \text{Abweichung vom Nennmaß}, \quad X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq 3.3)$:

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 3.3) &= P\Big(\underbrace{\Big|\frac{X}{3}\Big|}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq \underbrace{\frac{3.3}{3}}_{=1.1}\Big) \\ &= \Phi(1.1) - \Phi(-1.1) = 2\Phi(1.1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.8643 - 1 = \underline{72.86\%} \end{aligned}$$

b) Mit

$$P(|X| \leq 3.3) = P\left(\left|\frac{X}{\sigma}\right| \leq \frac{3.3}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{3.3}{\sigma}\right) - 1$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & 2\Phi\left(\frac{3.3}{\sigma}\right) - 1 \overset{!}{=} 0.9 \\ \Rightarrow \quad & \Phi\left(\frac{3.3}{\sigma}\right) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \frac{3.3}{\sigma} = 1.65 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{3.3}{1.65} = \underline{2}. \end{aligned}$$