Aufgabe 1 (*14 Punkte*)

Gegeben sei die Fläche S mit

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2},\ z = \cos(x + y) \right\}.$$

a) Skizzieren Sie die Menge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

b) Geben Sie eine Parametrisierung von S an, die die Variablen $u = x - y$ und $v = x + y$ verwendet.

c) Berechnen Sie

$$\int_{\partial S} G(x, y, z) \cdot d(x, y, z)$$

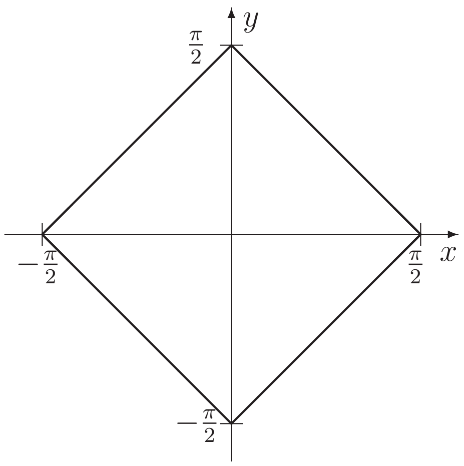
für das Vektorfeld

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z(x - y) \\ x - y \end{pmatrix},$$

wobei ∂S den Rand der Fläche S bezeichnet.

---

a) Eine mögliche Skizze ist



b) Aus $u = x - y$ und $v = x + y$ ergibt sich

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{v - u}{2}.$$

Damit lässt sich die Fläche folgendermaßen parametrisieren:

$$\Phi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \left(\frac{u + v}{2},\ \frac{v - u}{2},\ \cos(v) \right)^T.$$

c) **Weg 1: direkt**

Die Teilstücke der Randkurve ∂S lassen sich parametrisieren durch

$$\begin{aligned}
C_1 :&\quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \left(-\frac{v}{2}-\frac{\pi}{4}, -\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}, \cos(-v)\right)^T,\\
C_2 :&\quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto \left(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}, -\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}, 0\right)^T,\\
C_3 :&\quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}, \frac{v}{2}-\frac{\pi}{4}, \cos(v)\right)^T,\\
C_4 :&\quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto \left(-\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}, \frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}, 0\right)^T.
\end{aligned}$$

Die einzelnen Kurvenintegrale ergeben

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(C_1(t))\cdot C_1'(t)\,dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2}\cos(t) \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt\\
&= \frac{\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(t)+2\sin(t))\,dt\\
&= \frac{\pi}{4}\left[\sin(t)-2\cos(t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},\\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(C_2(t))\cdot C_2'(t)\,dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0,\\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(C_3(t))\cdot C_3'(t)\,dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2}\cos(t) \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt\\
&= \frac{\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(t)-2\sin(t))\,dt\\
&= \frac{\pi}{4}\left[\sin(t)+2\cos(t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},\\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(C_4(t))\cdot C_4'(t)\,dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2}-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\partial S} G(x,y,z)\cdot d(x,y,z) = \sum_{k=1}^{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(C_k(t))\cdot C_k'(t)\,dt = \frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{2}+0 = \pi.$$

Weg 2: mit Satz von Stokes

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\int_{\partial S} G(x,y,z)\cdot d(x,y,z) = \int_S \operatorname{rot} G(x,y,z)\cdot n(x,y,z)ds_{(x,y,z)}.$$

Die Rotation von G ist

$$\operatorname{rot} G(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1-(x-y) \\ 0-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x-1 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor ergibt sich als das Kreuzprodukt der beiden Tangentialvektoren:

$$T_u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2\sin(v) \end{pmatrix}, \quad n(u,v) = T_u \times T_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(v) \\ \sin(v) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} G(x,y,z)\cdot n(x,y,z)ds_{(x,y,z)} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} -u-1 \\ -1 \\ \cos(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(v) \\ \sin(v) \\ 1 \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((-u-2)\sin(v) + \cos(v)\right) du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}u^2 - 2u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\cos(v)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \pi\left[\sin(v)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi(1+1) = \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*15 Punkte*)

a) Transformieren Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$2y'''(x) + 2y''(x) - 8y'(x) = 4x^2$$

auf ein System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$xy'(x) = 2y(x) + x^2 - 3x, \quad y(1) = 3.$$

c) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$xy(x) - 1 + y(x) + xy'(x) = 0.$$

Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor und die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = 0$.

---

a) Mit $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$, $u_3(x) = y''(x)$ ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^2 \end{pmatrix}$$

b) Durch Umformen ergibt sich

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x - 3,$$

also eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Weg 1: Lösungsformel

Die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

lässt sich nach der Formel aus der Vorlesung berechnen durch

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds} + \int_{x_0}^x b(s)e^{-\int_s^x a(t)dt}ds.$$

Im vorliegenden Fall ist

$$a(x) = -\frac{2}{x}, \quad b(x) = x - 3.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\int_1^x \frac{2}{s}ds = [2\ln s]_1^x = 2\ln x = \ln x^2,$$
$$\int_s^x \frac{2}{t}dt = 2(\ln x - \ln s) = \ln\left(\frac{x}{s}\right)^2$$

und damit

$$\begin{aligned} y(x) &= 3e^{\ln x^2} + \int_1^x (s-3)e^{\ln\left(\frac{x}{s}\right)^2}\,ds \\ &= 3x^2 + \int_1^x (s-3)\left(\frac{x}{s}\right)^2 ds \\ &= 3x^2 + x^2 \int_1^x \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{s^2}\right) ds \\ &= 3x^2 + x^2 \left[\ln s + \frac{3}{s}\right]_1^x \\ &= 3x^2 + x^2 \left(\ln x + \frac{3}{x} - 3\right) \\ &= x^2 \ln x + 3x. \end{aligned}$$

Weg 2: Zunächst berechnen wir die Lösung $y_h(x)$ der homogenen Gleichung $y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 0$ durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx \quad\Rightarrow\quad \ln(y_h(x)) = 2\ln x + c = \ln(x^2) + c \quad\Rightarrow\quad y_h(x) = cx^2.$$

Eine Partikulärlösung wird über den Ansatz der Variation der Konstanten bestimmt:

$$y_p(x) = c(x)x^2.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$c'(x)x^2 = x - 3 \quad\Rightarrow\quad c'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \quad\Rightarrow\quad c(x) = \ln x + \frac{3}{x}$$

und damit die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = x^2 \ln x + 3x.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = cx^2 + x^2 \ln x + 3x.$$

Das Einsetzen des Anfangswertes ergibt

$$y(1) = c + 3 \overset{!}{=} 3 \quad\Rightarrow\quad c = 0$$

und damit die spezielle Lösung

$$y(x) = x^2 \ln x + 3x.$$

c) Laut Aufgabenstellung ist

$$f(x,y) = xy - 1 + y\,, \qquad g(x,y) = x.$$

Wegen

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x+1-1}{x} = 1 = \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}$$

erhält man den integrierenden Faktor

$$\ln|\lambda(x)| = x \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = e^x.$$

Damit ist also ein Potential $\Phi(x,y)$ von

$$\begin{pmatrix} \lambda(x)f(x,y) \\ \lambda(x)g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xye^x - e^x + ye^x \\ xe^x \end{pmatrix}$$

gesucht. Integration ergibt

$$\int (xye^x - e^x + ye^x)\,dx = xye^x - e^x + c_1(y),$$
$$\int (xe^x)\,dy = xye^x + c_2(x),$$

und somit ein Potential

$$\Phi(x,y) = xye^x - e^x.$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$\Phi(x,y) = xye^x - e^x = C.$$

Aus $y(1) = 0$ folgt $C = -e$, und die Lösung des Anfangsproblem ist

$$y(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{1-x}).$$

Aufgabe 3 (*9 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Fourier–Transformierte von $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Die Laplace–Transformierte von $g(x) = \cosh(x)$ lautet $\mathcal{L}(g)(s) = \frac{s}{s^2-1}$. Bestimmen Sie damit die Laplace–Transformierten von $g_1(x) = \cosh(3x+1)$ sowie von $g_2(x) = \sinh(x)$.

Erinnerung: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

---

a) Die Definition der Fourier–Transformation liefert

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-1-i\xi)x}dx \\ &= \frac{1}{1-i\xi}\left[e^{(1-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+i\xi}\left[e^{(-1-i\xi)x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2},\end{aligned}$$

also ist

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}.$$

b) (i) **Weg 1:** Direktes Ausrechnen der Tranformation ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g_1)(s) &= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(e^{3x+1} + e^{-(3x+1)}\right)e^{-sx}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(ee^{(3-s)x} + e^{-1}e^{-(3+s)x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e}{3-s}e^{(3-s)x} - \frac{1}{e(3+s)}e^{-(3+s)x}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{s-3} + \frac{1}{e(s+3)}\right) = \frac{s\cosh(1) + 3\sinh(1)}{s^2-9}.\end{aligned}$$

Weg 2: Mit der Substitution $z := 3x+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cosh(3x+1)\,e^{-sx}dx &= \frac{1}{3}\int_1^\infty \cosh(z)\,e^{-s\left(\frac{z-1}{3}\right)}dz \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{s}{3}}\left(\int_0^\infty \cosh(z)\,e^{-s\left(\frac{z}{3}\right)}dz - \int_0^1 \cosh(z)\,e^{-s\left(\frac{z}{3}\right)}dz\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{s}{3}}\left(\mathcal{L}(g)\left(\frac{s}{3}\right) - \frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{\left(1-\frac{s}{3}\right)z} + e^{-\left(1+\frac{s}{3}\right)z}\right)dz\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{s}{3}}\left(\frac{\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{s}{3}}e^{\left(1-\frac{s}{3}\right)z} - \frac{1}{1+\frac{s}{3}}e^{-\left(1+\frac{s}{3}\right)z}\right]_0^1\right) \\ &= e^{\frac{s}{3}}\frac{s}{s^2-9} - \frac{1}{2}e^{\frac{s}{3}}\left(\frac{1}{3-s}\left(e^{1-\frac{s}{3}}-1\right) - \frac{1}{3+s}\left(e^{-1-\frac{s}{3}}-1\right)\right) \\ &= e^{\frac{s}{3}}\frac{s}{s^2-9} - e^{\frac{s}{3}}\frac{s}{s^2-9} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{s-3} + \frac{e^{-1}}{3+s}\right) = \frac{s\cosh(1)+3\sinh(1)}{s^2-9}.\end{aligned}$$

Hinweis zu Weg 2: Die Aufgabe war nicht eindeutig formuliert, so dass ein Endergebnis der Form $e^{\frac{s}{3}}\frac{s}{s^2-9}$ mit der vollen Punktzahl bewertet wurde.

(ii) Die Ableitungsregel liefert mit $\sinh(x) = \cosh'(x)$

$$\mathcal{L}(g_2)(s) = s\mathcal{L}(g)(s) - \cosh(0) = \frac{s^2}{s^2-1} - 1 = \frac{1}{s^2-1}.$$

Aufgabe 4 (*11 Punkte*)

Bestimmen Sie die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung

$$4x\partial_x u(x,y) + (3x+y)\partial_y u(x,y) = x^2(9y+3x)\,.$$

Berechnen Sie die Lösung $u(x,y)$ für die Anfangswerte $u(1,y) = y+8$.

Die Charakteristiken $s \mapsto \big(x(s), y(s)\big)^T$ der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen das homogene System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Dieses besitzt die (direkt abzulesenden) Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (0,1)^T$, $v_2 = (1,1)^T$. Die Charakteristiken sind somit

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^s + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4s}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter c_1, c_2 können durch Schnitt der Charakteristiken für $s = 0$ mit der Geraden $x = 1$, auf der die Anfangsbedingungen $u(1,y)$ gegeben sind, ermittelt werden. Für den Punkt $(1, y_0)$ auf dieser Geraden ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1,\ c_1 = y_0 - 1,$$

d.h.

$$x(s) = \mathrm{e}^{4s}, \quad y(s) = (y_0 - 1)\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{4s}.$$

Mit $\widetilde{u}(s) := u\big(x(s), y(s)\big)$ folgt die Ableitung $\widetilde{u}'(s) = f\big(x(s), y(s)\big)$, also

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(s) &= \int f\big(x(s), y(s)\big)\, ds = \int x^2(s)(9y(s) + 3x(s))\, ds \\
&= \int e^{8s}\left(9(y_0 - 1)e^s + 9\mathrm{e}^{4s} + 3\mathrm{e}^{4s}\right) \\
&= \int \left(9(y_0 - 1)\mathrm{e}^{9s} + 12\mathrm{e}^{12s}\right)\, ds \\
&= (y_0 - 1)\mathrm{e}^{9s} + \mathrm{e}^{12s} + c \\
&= \mathrm{e}^{8s}\Big((y_0 - 1)\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{4s}\Big) + c \\
&= x^2(s)y(s) + c\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Anfangswerte gilt

$$\widetilde{u}(0) = x^2(0)y(0) + c = y_0 + c \stackrel{!}{=} u(1, y_0) = y_0 + 8 \quad \Rightarrow \quad c = 8\,,$$

und damit ist $u(x,y) = yx^2 + 8$ die gesuchte Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Bei der Herstellung eines Rechners werden die Geräte in zwei Qualitätsgruppen eingeteilt: Ein Gerät vom Typ I übersteht die Garantiezeit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8, während ein Gerät vom Typ II mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 noch vor Ablauf der Garantiezeit repariert werden muss. 20% aller Rechner sind vom Typ I.

a) Sie kaufen sich einen Rechner. Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteht Ihr Gerät die Garantiezeit ohne Reparatur?

b) Leider muss Ihr Rechner noch während der Garantiezeit zur Reparatur. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Ihr Gerät vom Typ I?

---

a)

$$B_1 \mathrel{\widehat{=}} \text{Rechner vom Typ I}, \quad P(B_1) = 0.2$$
$$B_2 \mathrel{\widehat{=}} \text{Rechner vom Typ II}, \quad P(B_2) = 0.8$$
$$A \mathrel{\widehat{=}} \text{Rechner übersteht die Garantiezeit}, \quad P(A|B_1) = 0.8, \quad P(A|B_2) = 0.3$$

Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 0.8 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8 \\ &= 0.16 + 0.24 \\ &= \underline{0.40} \end{aligned}$$

b) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B_1|\overline{A})$.

Mit der Bayes'schen Formel folgt

$$P(B_1|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{\big(1 - P(A|B_1)\big)P(B_1)}{1 - P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.6} = \underline{\frac{1}{15}}.$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

Ein Student schreibt eine Prüfung, die aus zwei Teilen besteht. Jeder Teil wird unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p bestanden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Student

a) nur den zweiten Teil besteht,

b) den zweiten Teil besteht, wenn er im ersten Teil durchgefallen ist,

c) mindestens einen Teil besteht.

---

a)

$$A_i \mathrel{\widehat{=}} \text{Teil } i \text{ bestanden}$$

$$P(\overline{A_1} \cap A_2) = (1-p)p$$

b)

$$P(A_2|\overline{A_1}) = p$$

c)

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - (p-1)^2$$