Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 240 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 13** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 18. 10. 2010 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18. 10.** bis **22. 10. 2010** mit Frau Dr. Iryna Rybak (täglich 10 Uhr - 12 Uhr, Raum V 57.7.151) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+i| + |iz-1| \leqq 4 \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < -1 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1, M_2 und $M_1 \setminus M_2$.

Aufgabe 2 (*7 Punkte*) Es seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = (1, c, 1)^\intercal$ und $v_2 = (2, 1, 2)^\intercal$ für $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Durch v_1, v_2 wird ein von c abhängiges Parallelogramm Δ_c mit Fläche F_c aufgespannt.
Bestimmen Sie c so, dass $F_c < 1$ wird.

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Es seien die Vektoren $u = (1, 0, 1)^\intercal$ und $v_k = (0, -1, k)^\intercal$ mit $k \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte mit den Ortsvektoren $P = (0, 5, 2)^\intercal$ und $Q = (1, 2, 3)^\intercal$ im Raum $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie k so, dass die Geraden

$$g := \left\{ P + tu \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \ell_k := \left\{ Q + sv_k \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

sich in genau einem Punkt Z schneiden. Geben Sie diesen Punkt Z an.

(b) Die Geraden g, ℓ_0 liegen auf einer Ebene E. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene in Hesse-Normalform.

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1 + 12x_2 + 7 = 0 \right\}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(x+3)^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-2)^k}{4^k}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{5n^2+1}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Wir betrachten $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Berechnen Sie das in $x = 0$ entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2(f, x, 0)$ und das zugehörige Restglied $R_2(f, x, 0)$ nach Lagrange.

(b) Ersetzen wir $\cos(x)$ durch $T_2(f, x, 0)$, so entsteht ein Approximationsfehler. Bestimmen Sie $\beta \in I$ so, dass der Approximationsfehler auf $[0, \beta] \subseteqq I$ kleiner als 10^{-3} wird.

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := (x^2 - 2y^2)e^{-(x+y)}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie Lage und Art aller kritischen Stellen von f.

Aufgabe 8 (*13 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}-1}$

(c) $\displaystyle\int (1+2\cos x)^2\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (5 *Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \kappa\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + b\,.$$

Bestimmen Sie einen Fixpunkt von κ, das heißt: bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\kappa(x) = x$.

$$x = \boxed{}$$

Die Matrix A beschreibt eine Drehung um den Winkel $\boxed{}$ im Gegenuhrzeigersinn.

Welche Eigenschaften hat die Matrix A? Tragen Sie entweder „wahr“ oder „falsch“ ein.

quadratisch		eigentlich orthogonal	
symmetrisch		hermitesch	

Aufgabe 10 (5 *Punkte*) Für die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wird das folgende Vektorfeld definiert:

$$g\colon (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y^2 + \beta y}{x} \\ (\alpha y + \beta) \ln(x) \\ w^2 + \alpha w \\ \beta z w + \alpha z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}g = \boxed{}$

Für welche Paare (α, β) ist die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}g$ symmetrisch? $\boxed{}$

Aufgabe 11 (*5 Punkte*) Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

	Entwicklungspunkt	Konvergenzradius
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n\,5^n}$		
$\sum_{n=0}^{\infty} n^2(z-i+1)^n$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^n$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (4^n+3^n) z^n$		

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arctan\left(\sin(x)\right) =$ $\boxed{}$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^{2x} =$ $\boxed{}$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(\sqrt{x}\ln(1+x^2)\right) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 13 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie

$\det(A) = \boxed{}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$ $\mathrm{Rg}(A) = \boxed{}$

sowie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $v_1 = \boxed{}$ $v_2 = \boxed{}$
