Scheinklausur zur Numerischen Mathematik 1

Zugelassene Hilfsmittel: 5 eigenhändig beschriebene Blätter DIN A4
Bearbeitungszeit: 90 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

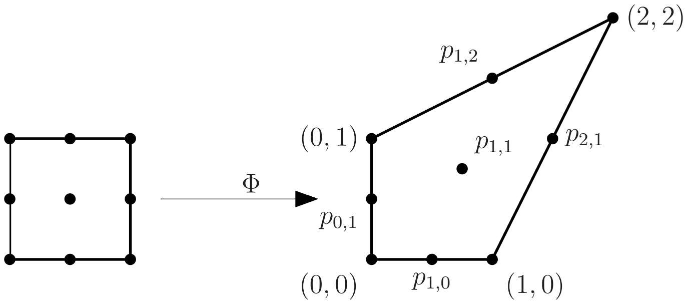
Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Der Romberg-Algorithmus integriert kubische Polynome exakt.
2. Für eine auf $[0, 1)$ gleichverteilte Folge strebt $(x_0 + \cdots + x_{\ell-1})/\ell$ gegen $1/2$.
3. Die durch $x_0 = 0$, $x_{\ell+1} = 2^{-x_\ell}$ mit $\ell = 0, 1, \ldots$ definierte Iteration konvergiert.
4. Jeder durch die Methode des steilsten Abstiegs erzeugte Häufungspunkt ist eine lokale Extremstelle.
5. Die Ableitung eines B-Splines ist ein B-Spline.

Aufgabe 2 Geben Sie die Gewichte der Tensorprodukt-Trapezregel mit $h = 1/2$ für das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ an und transformieren Sie Stützstellen und Gewichte bilinear auf den abgebildeten Drachen.



Geben Sie dazu insbesondere die zur Bestimmung der transformierten Stützstellen $p_{k,\ell} = (x_{k,\ell}, y_{k,\ell})$ und Gewichte $w_{k,\ell}$ verwendete bilineare Parametrisierung Φ und deren Jacobi-Matrix an.

Hinweis: Verwenden Sie, dass aufgrund der Symmetrie $x_{k,\ell} = y_{\ell,k}$ und $w_{k,\ell} = w_{\ell,k}$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die dividierten Differenzen und die Newton-Form des Interpolationspolynoms p für die Daten

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	-3	5	9

.

Wie groß kann der Fehler $\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p(x)|$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $|f^{(3)}(x)| \le 1$ höchstens sein?

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung

$$g(x) = \frac{3}{2+x}\,.$$

Für welche Intervalle $[\alpha, 2]$, $\alpha \ge 0$, sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und wie klein kann die Kontraktionskonstante c gewählt werden?

Aufgabe 5 Führen Sie einen Schritt der Methode des steilsten Abstiegs für die Funktion

$$f(x,y) = y^2 - x^2 + x^4$$

mit Startpunkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ durch. Wird ein Minimum gefunden?

Aufgabe 6

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `[c,s] = exp_fit(t,p,c,s)`, das das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|f\|_2 \to \min, \quad f_j = p_j - \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(s_k t_j),\ j = 1, \ldots, m > n\,,$$

mit dem Gauß-Newton-Verfahren löst. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Konvergenz für die übergebenen Startwerte gesichert ist, und stoppen Sie die Iteration, wenn sich die Komponenten von c und s um weniger als 10^{-6} ändern.

Hinweis:

Bestimmen Sie zunächst die $m \times (2n)$-Jacobi-Matrix $[\partial f/\partial c,\ \partial f/\partial s]$.