Prof. Dr. Klaus Höllig 7. Februar 2011

# Scheinklausur zur Numerischen Mathematik 1

## Lösungen

---

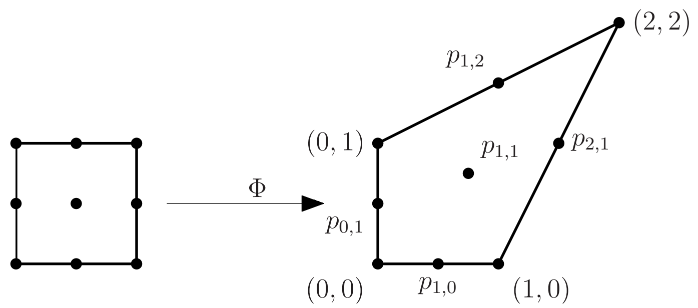
**Aufgabe 1** Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Der Romberg-Algorithmus integriert kubische Polynome exakt.
2. Für eine auf $[0,1)$ gleichverteilte Folge strebt $(x_0 + \cdots + x_{\ell-1})/\ell$ gegen $1/2$.
3. Die durch $x_0 = 0\,,\ x_{\ell+1} = 2^{-x_\ell}$ mit $\ell = 0, 1, \ldots$ definierte Iteration konvergiert.
4. Jeder durch die Methode des steilsten Abstiegs erzeugte Häufungspunkt ist eine lokale Extremstelle.
5. Die Ableitung eines B-Splines ist ein B-Spline.

**Lösung**

1. Richtig. Die Trapezregel integriert lineare Polynome exakt; durch einen Romberg-Schritt beginnt der Fehlerterm dann mit der vierten Ableitung.
2. Richtig. Der Ausdruck kann als Monte Carlo Integration der Funktion $f(x) = x$ aufgefasst werden. Für eine gleichverteilte Zufallsfolge strebt der Ausdruck gegen den Integralwert $1/2$.
3. Richtig. Für $D = [0, \infty)$ sind die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
4. Falsch. Die Häufungspunkte sind nur kritische Punkte, müssen aber nicht extremal sein.
5. Falsch. Die Ableitung ist die Differenz zweier B-Splines mit unterschiedlichem Träger.

**Aufgabe 2** Geben Sie die Gewichte der Tensorprodukt-Trapezregel mit $h = 1/2$ für das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ an und transformieren Sie Stützstellen und Gewichte bilinear auf den abgebildeten Drachen.




Geben Sie dazu insbesondere die zur Bestimmung der transformierten Stützstellen $p_{k,\ell} = (x_{k,\ell}, y_{k,\ell})$ und Gewichte $w_{k,\ell}$ verwendete bilineare Parametrisierung $\Phi$ und deren Jacobi-Matrix an.

**Hinweis:** Verwenden Sie, dass aufgrund der Symmetrie $x_{k,\ell} = y_{\ell,k}$ und $w_{k,\ell} = w_{\ell,k}$.

**Lösung**

Die Gewichte der Trapezregel sind 1/16 an den Ecken, 1/8 an den Kantenmitten und 1/4 in der Mitte.

Die bilineare Parametrisierung hat die Form

$$\begin{aligned}\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(1-v) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1-u)v + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} uv \\ &= \begin{pmatrix} u + uv \\ v + uv \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Koordinaten der Stützstellen der Trapezregel ergibt

$$(x_{k,\ell}, y_{k,\ell}) : \quad \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1/2) & (0,1) \\ (1/2,0) & (3/4,3/4) & (1,3/2) \\ (1,0) & (3/2,1) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

Die Gewichte werden mit $\det J = 1 + u + v$ multipliziert:

$$w_{k,\ell} : \quad \begin{pmatrix} 1/16 & 3/16 & 1/8 \\ 3/16 & 1/2 & 5/16 \\ 1/8 & 5/16 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie die dividierten Differenzen und die Newton-Form des Interpolationspolynoms $p$ für die Daten

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $-3$ | $5$ | $9$ |

Wie groß kann der Fehler $\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - p(x)|$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $|f^{(3)}(x)| \le 1$ höchstens sein?

**Lösung** Man berechnet das Dividierte-Differenzen-Schema

| $x$ | $f$ | $\Delta_k^1$ | $\Delta_0^2$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $-3$ | | |
| | | $8/1 = 8$ | |
| $0$ | $5$ | | $(4-8)/2 = -2$ |
| | | $4/1 = 4$ | |
| $1$ | $9$ | | |

und liest aus der oberen Schrägzeile die Newton-Form ab:

$$p(x) = -3 + 8(x+1) - 2(x+1)x = -2x^2 + 6x + 5$$

Es ist

$$|f(x) - p(x)| = \underbrace{\left|\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\right|}_{\le 1/6} |\underbrace{(x+1)x(x-1)}_{x^3-x}|\,.$$

Somit folgt

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - p(x)| \le \frac{1}{6} \max_{-1\le x\le 1} |x^3 - x|$$

Man bestimmt für die punktsymmetrische Funktion $g(x) = x^3 - x$ die Extrema auf $[-1,1]$. Aus $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ erhält man $x = \pm 1/\sqrt{3}$ mit $g(1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$ und $g(-1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$. Somit ist $\max_{-1\le x\le 1} |x^3 - x| = 2/(3\sqrt{3})$, und letztlich erhält man

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - p(x)| \le \frac{1}{9\sqrt{3}}\,.$$

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung

$$g(x) = \frac{3}{2+x}\,.$$

Für welche Intervalle $[\alpha, 2]$, $\alpha \geq 0$, sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und wie klein kann die Kontraktionskonstante $c$ gewählt werden?

**Lösung** Für Fixpunkte gilt $x = \dfrac{3}{2+x}$ bzw. $x^2 + 2x = 3$, und man erhält $x_* \in \{1, -3\}$.

Wegen $g'(x) = \dfrac{-3}{(2+x)^2}$ gilt:

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{-1}{3} &&\Rightarrow \text{ anziehender Fixpunkt} \\ g'(-3) &= -3 &&\Rightarrow \text{ abstoßender Fixpunkt} \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt, wenn $g$ eine Kontraktion ist und wenn gilt:

$$g([\alpha, 2]) \subseteq [\alpha, 2] \;\Leftrightarrow\; g(\alpha) = \frac{3}{2+\alpha} \leq 2 \text{ und } g(2) = \frac{3}{4} \geq \alpha\,,$$

da $g$ monoton fallend ist. Somit folgt $\alpha \leq 3/4$, da die erste Bedingung mit $\alpha \geq 0$ bereits erfüllt wird.

Kleinstes $c$ (für Kontraktion): Da auch $|g'|$ für $\alpha \geq 0$ monoton fällt, ist

$$c = |g'(\alpha)| = \frac{3}{(2+\alpha)^2} \leq \frac{3}{4} < 1.$$

Somit erfüllen alle Intervalle $[\alpha, 2]$ mit $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit der Kontraktionskonstante $c = \frac{3}{(2+\alpha)^2}$.

**Aufgabe 5** Führen Sie einen Schritt der Methode des steilsten Abstiegs für die Funktion

$$f(x,y) = y^2 - x^2 + x^4$$

mit Startpunkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ durch. Wird ein Minimum gefunden?

**Lösung** Der Gradient von $f$,

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (-2x + 4x^3, 2y)^{\mathrm{t}}\,,$$

im Punkt $(1,1)$ ist $(2,2)^{\mathrm{t}}$. Also ist im ersten Schritt das Minimum von

$$f(x_0 - 2t, y_0 - 2t) = (1-2t)^2 - (1-2t)^2 + (1-2t)^4 = (1-2t)^4$$

zu bestimmen. Man erhält $t = 1/2$ und $(x_1, y_1) = (0,0)$ . Da der Gradient verschwindet bricht das Verfahrewn ab.

Da die Hesse-Matrix

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen hat ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt, es wird also kein Minimum erreicht.

## Aufgabe 6

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `[c,s] = exp_fit(t,p,c,s)`, das das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|f\|_2 \to \min, \quad f_j = p_j - \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(s_k t_j),\ j = 1, \ldots, m > n\,,$$

mit dem Gauß-Newton-Verfahren löst. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Konvergenz für die übergebenen Startwerte gesichert ist, und stoppen Sie die Iteration, wenn sich die Komponenten von $c$ und $s$ um weniger als $10^{-6}$ ändern.

**Hinweis:**

Bestimmen Sie zunächst die $m \times (2n)$-Jacobi-Matrix $[\partial f/\partial c,\ \partial f/\partial s]$.

**Lösung**

```
function [c,s] = exp_fit(t,p,c,s)

delta = inf;
while delta >= 1.0e-6
   E = exp(t*s');
   f = p - E*c;
   df = [-E, -(t*c').*E];
   dcs = df\f;
   c = c - dcs(1:end/2);
   s = s - dcs(end/2+1:end);
   delta = norm(dcs,inf);
end
```