Prof. Dr. Klaus Höllig 18. März 2011

Modulprüfung Numerische Mathematik 1

Lösungen

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Trapezregel integriert Parabeln exakt.
2. Für eine glatte konvexe Funktion f mit $\min_x f(x) \leq 0$ konvergiert das Newton-Verfahren für jeden Startwert x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$.
3. Die diskrete Fourier-Transformation eines reellen Vektors ist reell.
4. Alle dividierten Differenzen von $\exp(x)$ sind positiv.
5. Die Methode der konjugierten Gradienten ist ein lineares Iterationsverfahren.

Lösung

1. Falsch. Die Trapezregel liefert das Integral der an den Stützstellen interpolierenden linearen Funktion und hat einen Fehler von $-\frac{b-a}{12} f''(u)h^2$. Die zweite Ableitung ist bei Parabeln i.A. nicht Null.
2. Richtig. Für $f'' > 0$ liegt f stets oberhalb der Tangente. Die Konvergenz lässt sich anhand des Graphen veranschaulichen.
3. Falsch. Wählt man für $n = 4$ beispielsweise $a = [0\ 1\ 0\ 0]$, so ist $w_n = \exp(2\pi i/4) = i$ und $\hat{a}_1 = \sum_{j=0}^{3} a_j i^j = i \notin \mathbb{R}$.
4. Richtig. Für jede glatte Funktion f gilt $\Delta^n = f^{(n)}(t)/n!$ an einer Stelle $t \in [x_0, x_n]$. Die Behauptung folgt aus $f^{(n)}(x) = e^x > 0$.
5. Falsch. Ein lineares Iterationsverfahren liefert im Allgemeinen nicht die Lösung nach endlich vielen Schritten.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung

$$x \mapsto g(x) = 3\sqrt{x} - 2\,.$$

Verifizieren Sie für eines der Intervalle

$$(0,2)\,,[3,5] \quad \text{oder} \quad [1,4]$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

Hinweis: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{5} \approx 2.24$.

Lösung Die Fixpunktgleichung

$$x = 3\sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 9x$$

hat die Lösungen 1 und 4. Damit kommt offensichtlich nur $D = [3,5]$ als Intervall für die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes in Frage; $(0,2)$ ist nicht abgeschlossen und $[1,4]$ enthält zwei Fixpunkte. Da g monoton ist, folgt aus

$$g(3) = 3\sqrt{3} - 2 > 3.1 \geq 3, \quad g(5) = 3\sqrt{5} - 2 < 4.9 \leq 5$$

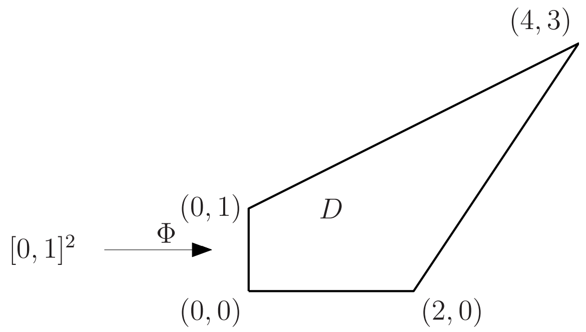
dass $g([3,5]) \subseteq [3,5]$. Aus

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

ergibt sich für die Kontraktionskonstante die Abschätzung

$$c \leq \max_{x\in[3,5]} |g'(x)| = \frac{3}{2\sqrt{3}} < \frac{3}{3.4} < 1\,.$$

Aufgabe 3 Geben Sie eine bilineare Parametrisierung Φ des abgebildeten Vierecks und deren Jacobi-Matrix an.



Bestimmen Sie das Gewicht w und die Stützstelle (x_1, x_2) der transformierten Mittelpunktsregel $\iint\limits_D f\,dx \approx w f(x_1, x_2)$.

Lösung Die bilineare Parametrisierung hat die Form

$$\begin{aligned}\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(1-v) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1-u)v + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} uv \\ &= \begin{pmatrix} 2u + 2uv \\ v + 2uv \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 2 + 2v & 2u \\ 2v & 1 + 2u \end{pmatrix}, \quad \det J = 2 + 4u + 2v\,.$$

Einsetzen von $(u, v) = (1/2, 1/2)$ ergibt die Stützstelle $(3/2, 1)$. Das Gewicht ist

$$|\det J|_{|(1/2,1/2)} = 5\,.$$

Aufgabe 4 Approximieren Sie die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x - \cos(\pi x)$ mit Hilfe der Newton-Form des quadratischen Interpolationspolynoms p an den Stützstellen $x = -1/2, 0, 1/2$. Geben Sie eine Schranke für das Maximum des Fehlers $|f - p|$ auf $[-1/2, 1/2]$ an.

Hinweis: Die lokalen Extrema von $|x|\,|x^2 - a^2|$ haben den Wert $(2/9)\sqrt{3}\,|a|^3$.

Lösung Aus den dividierten Differenzen

$$\begin{array}{r|rrr} -1/2 & -1/2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \\ 1/2 & 1/2 & & \end{array}$$

ergibt sich die Newton-Form

$$p(x) = -1/2 - (x + 1/2) + 4(x + 1/2)x = 4x^2 + x - 1\,.$$

Die positive Nullstelle ist

$$x_\star = -1/8 + \sqrt{17}/8 \approx 0.3904\,.$$

Da die dritte Ableitung von f durch π^3 beschränkt ist, ist der Fehler

$$\leq \max_{x\in[-1/2,1/2]} \frac{\pi^3}{6}|x|\,|x^2 - 1/4|\,.$$

Das Maximum wird für $x = \sqrt{3}/6$ angenommen und ist gleich $\pi^3\sqrt{3}/216 \approx 0.2486$.

<u>**Aufgabe 5**</u> Bestimmen Sie für die quadratische Funktion

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und den Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ jeweils die ersten beiden Suchrichtungen für die Methode des steilsten Abstiegs und die Methode der konjugierten Gradienten.

Hinweise: Richtungen sind nur bis auf skalare Vielfache zu bestimmen; die Normierung (insbesondere auch das Vorzeichen) ist irrelevant. Benutzen Sie die Eigenschaften der Gradienten und konjugierten Suchrichtungen bei der Methode der konjugierten Gradienten.

Lösung In beiden Fällen ist die erste Suchrichtung

$$u_0 \parallel g_0 = \operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix} .$$

Der zweite Gradient ist orthogonal zu g_0, d.h.,

$$g_1 \parallel \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist die zweite Suchrichtung für die Methode des steilsten Abstiegs.

Für die Methode der konjugierten Gradienten ist die zweite Suchrichtung u_1 zu $(0,5)^t$ konjugiert. Aus

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5x + 15y = 0$$

folgt $u_1 \parallel (3, -1)$.

Aufgabe 6 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `x = intersection(A,B,x)`, das einen Schnittpunkt der durch

$$x^t Ax - 1 = 0, \quad x^t Bx - 1 = 0$$

gegebenen zwei Kegelschnitte bestimmt. (A und B sind symmetrische 2×2-Matrizen.) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, gehen Sie davon aus, dass die Konvergenz für die übergebene Startnäherung $(x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$ gesichert ist, und stoppen Sie die Iteration, wenn sich die Komponenten von x um weniger als 10^{-6} ändern.

Lösung

```
function x = intersection(A,B,x)

delta = inf;
while delta >= 1.0e-6
   f = [x'*A*x-1;x'*B*x-1];
   df = 2*[x'*A;x'*B];
   dx = df\f;
   x = x - dx;
   delta = norm(dx,inf);
end
```