Prof. Dr. Klaus Höllig 30. 03. 2011

Modulprüfung Grundlagen der Computermathematik

Zugelassene Hilfsmittel: 5 eigenhändig beschriebene Blätter DIN A4
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Wichtige Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass bei einigen Fachrichtungen zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis.

Informieren Sie sich bis spätestens 29. 04. 2011 über Ihr Prüfungsergebnis, das voraussichtlich ab 18. 04. 2011 bekannt gegeben wird, und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend im Sekretariat 8.162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung. Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

a) Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert, wenn die Eigenwerte von A einfach und positiv sind.

b) Eine Householder-Transformation ist zu sich selbst invers.

c) Das Jacobi-Verfahren konvergiert für alle Matrizen A mit $\|A\| < 1$.

d) Die Lösungsmenge eines linearen Programms ist ein affiner Raum.

e) Lösen x und $\tilde{x}$ ein Ausgleichsproblem, so auch $(x + \tilde{x})/2$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form, $A = \sum_{k=1}^{\operatorname{Rang} A} u_k \sigma_k v_k^{\mathrm{t}}$, sowie deren Pseudoinverse.

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein Matlab-Programm `function [x,c,d] = solve(a,b)`, das das diagonal dominante tridiagonale lineare Gleichungssystem

$$x_{k-1} + a_k x_k + x_{k+1} = b_k, \quad k = 1, \ldots, n \quad (x_0 = 0 = x_{n+1})$$

zunächst durch Gauß-Elimination auf obere Dreiecksform bringt,

$$d_k x_k + x_{k+1} = c_k \,,$$

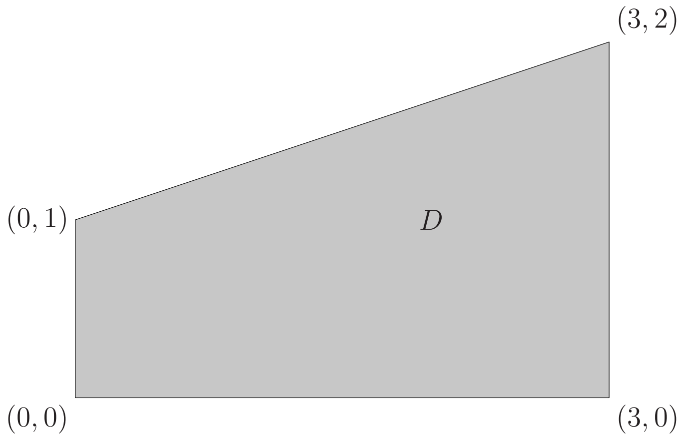
und dann durch Rückwärtseinsetzen die Lösung $(x_1, \ldots, x_n)^t$ bestimmt.

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

jeweils einen Schritt $(u_1,\, u_2)^{\mathrm{t}} \to v$ der Jacobi- und der Gauß-Seidel-Iteration durch. Lesen Sie aus den Ausdrücken für v_k die Iterationsmatrizen ab, und untersuchen Sie, ob die Verfahren für das betrachtete Beispiel konvergieren.

Aufgabe 5 Beschreiben Sie die abgebildete Menge D durch Ungleichungen.



Bringen Sie das Lineare Programm $\min\limits_{(x_1,x_2)^t \in D} 2x_1 - x_2$ auf Standardform und bestimmen Sie die zulässigen Basislösungen sowie den minimalen Zielfunktionswert.

Aufgabe 6 Annullieren Sie durch eine Householder-Transformation das erste Element der zweiten Zeile der Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right).$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.