Prof. Dr. Klaus Höllig 30. März 2011

Klausur zu Grundlagen der Computermathematik

Lösungen

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

a) Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert, wenn die Eigenwerte von A einfach und positiv sind.

b) Eine Householder-Transformation ist zu sich selbst invers.

c) Das Jacobi-Verfahren konvergiert für alle Matrizen A mit $\|A\| < 1$.

d) Die Lösungsmenge eines linearen Programms ist ein affiner Raum.

e) Lösen x und $\tilde{x}$ ein Ausgleichsproblem, so auch $(x + \tilde{x})/2$.

Lösung

a) Richtig: $0 < \lambda_k \neq \lambda_\ell \implies \exists$ größter Eigenwert.

b) Richtig: Eine zweifache Spiegelung lässt jeden Vektor invariant.

c) Falsch: Ist beispielsweise ein Diagonalelement null, so ist das Jacobi-Verfahren nicht durchführbar.

d) Falsch: Die Lösungsmenge kann aus einem (beschränkten) Geradensegment bestehen.

e) Richtig: Die Normalengleichungen sind auch für $(x + \tilde{x})/2$ erfüllt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in faktorisierter Form, $A = \sum_{k=1}^{\mathrm{Rang}\,A} u_k \sigma_k v_k^{\mathrm{t}}$, sowie deren Pseudoinverse.

Lösung

Die Eigenwerte von

$$A^{\mathrm{t}} A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sind $9 = s_1^2$ und $1 = s_2^2$ und

$$(v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix aus Eigenvektoren.

Aus $A = USV^t$ erhält man

$$A(v_1, v_2) = US \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3u_1, u_2)\,.$$

Die relevanten Spalten von U sind also

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$A = 3u_1 v_1^t + u_2 v_2^t, \quad A^+ = v_1 u_1^t / 3 + v_2 u_2^t$$

als Singulärwertzerlegung bzw. Pseudoinverse.

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein Matlab-Programm `function [x,c,d] = solve(a,b)`, das das diagonal dominante tridiagonale lineare Gleichungssystem

$$x_{k-1} + a_k x_k + x_{k+1} = b_k, \quad k = 1, \ldots, n \quad (x_0 = 0 = x_{n+1})$$

zunächst durch Gauß-Elimination auf obere Dreiecksform bringt,

$$d_k x_k + x_{k+1} = c_k \, ,$$

und dann durch Rückwärtseinsetzen die Lösung $(x_1, \ldots, x_n)^t$ bestimmt.

Lösung

```
function [x,c,d] = solve(a,b)

n = length(b);
for k = 2:n
   a(k) = a(k)-1/a(k-1); b(k) = b(k)-b(k-1)/a(k-1);
end
d = a; c = b;
x(n) = c(n)/d(n);
for k = n-1:-1:1
   x(k) = (c(k)-x(k+1))/d(k);
end
```

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

jeweils einen Schritt $(u_1,\, u_2)^{\mathrm{t}} \to v$ der Jacobi- und der Gauß-Seidel-Iteration durch. Lesen Sie aus den Ausdrücken für v_k die Iterationsmatrizen ab, und untersuchen Sie, ob die Verfahren für das betrachtete Beispiel konvergieren.

Lösung

Der Iterationsschritt für das Jacobi-Verfahren hat die Form

$$v_1 = (2 - u_2)/2, \quad v_2 = 2 - u_1\,.$$

Die Iterationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\pm 1/\sqrt{2}$; folglich konvergiert das Verfahren.

Für das Gauß-Seidel-Verfahren ist

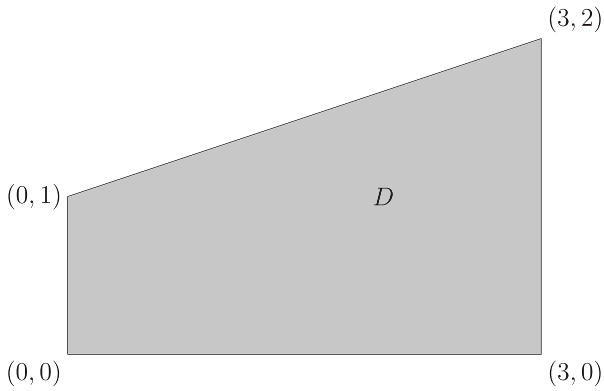
$$v_1 = (2 - u_2)/2, \quad v_2 = 2 - v_1 = 2 - (2 - u_2)/2 = 1 + u_2/2\,.$$

Die Iterationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $0, 1/2$; folglich konvergiert das Verfahren.

Aufgabe 5 Beschreiben Sie die abgebildete Menge D durch Ungleichungen.



Bringen Sie das Lineare Programm $\min\limits_{(x_1,x_2)^t \in D} 2x_1 - x_2$ auf Standardform und bestimmen Sie die zulässigen Basislösungen sowie den minimalen Zielfunktionswert.

Lösung

Die Menge D wird durch die Ungleichungen

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \leq 3,\ x_2 \leq 1 + x_1/3 \Leftrightarrow -x_1 + 3x_2 \leq 3$$

beschrieben.

Durch Einführen von Schlupfvariablen erhält man die Standardform

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^t & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Die zulässigen Basislösungen sind

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der Zielfunktionswerte erkennt man, dass die dritte Basislösung mit Wert -1 optimal ist.

Aufgabe 6 Annullieren Sie durch eine Householder-Transformation das erste Element der zweiten Zeile der Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right) .$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung

Die Parameter der Householder-Transformation, bestimmt durch die erste Spalte c von A, sind

$$d = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad r = \|c\| d_1 = 5 \cdot 8 = 40 .$$

Durch Anwendung der Transformation $E - dd^t/r$ auf $(A|b)$ erhält man die verallgemeinerte obere Dreiecksform

$$(R|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 5 & 3 \end{array} \right) .$$

Die transformierte Matrix lässt sich auch ohne Rechnung bestimmen, indem man ausnutzt, dass

$$c \to -\|c\|_2 e, \quad \|c\|_2 e \to -c \quad (e = (1,0)^t) ,$$

und das Orthogonalität bei einer Householder-Transformation erhalten bleibt, nicht jedoch die Orientierung einer orthogonalen Basis.

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von $Ax = b \Leftrightarrow Rx = \tilde{b}$ kann man $x_3 = t$ als freien Parameter wählen und erhält durch Rückwärtseinsetzen

$$x_2 = (3 - 5t)/(-4) = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}t$$

sowie

$$x_1 = (-4 + 3x_2)/(-5) = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}t .$$