Lösungsvorschläge zur Klausur
für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Es sei

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ -(x^2+y^2) \leq z \leq xy+1\right\}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie: M ist bezüglich der (x,y)-Ebene ein Normalbereich.

(b) Bestimmen Sie für das stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) := \left(1, 0, zx\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

den Ausfluss von f durch die Oberfläche von M.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Wir setzen im Folgenden zur Vereinfachung $k(x,y) := -(x^2+y^2)$ und $\ell(x,y) := xy+1$ sowie $D_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

(a) Da ℓ, k auf $D_1(0)$ stetig sind und $D_1(0)$ als Kreisfläche selbst ein Normalbereich bezüglich der x respektive $y-$Achse darstellt, ist nur noch zu verifizieren, dass $k(x,y) \leq \ell(x,y)$ für alle $(x,y) \in D_1(0)$ gilt.

Wir führen Zylinderkoordinaten ein: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ mit $r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]$. Damit erhalten wir

$$l(x,y) = r^2\cos\varphi\sin\varphi + 1 \geq 1 - \underbrace{|r^2| \cdot |\cos\varphi\sin\varphi|}_{\leq 1} \geq 0 \geq -r^2 = k(x,y).$$

Folglich ist M ein Normalgebiet bezüglich der (x,y)-Ebene.

(b) **1. Variante (mit dem Satz von Gauß)**

Aus dem Satz von Gauß wissen wir

$$A(f, \partial M) = \iiint_M \operatorname{div} f(x,y,z)\, dxdydz,$$

wobei wir die Randfläche von M mit ∂M bezeichnen.

Für die Divergenz in kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = x \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

Damit folgt

$$\iiint_M \operatorname{div} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_1(0)} \int_{k(x,y)}^{\ell(x,y)} x \cdot \sqrt{x^2+y^2}\,dzdxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=k(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{\ell(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} r^2\cos\varphi \cdot \underbrace{|\det J_\Phi|}_{r}\,dzdrd\varphi.$$

wobei wir M in der zweiten Zeile auf Zylinderkoordinaten transformiert haben. Daraus erhalten wir weiter

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=-r^2}^{r^2\cos\varphi\sin\varphi+1} r^3\cos\varphi\,dzdrd\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\cos\varphi\left(r^2\cos\varphi\sin\varphi+1+r^2\right)drd\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^5+r^3)\cos\varphi\,drd\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5\cos^2\varphi\sin\varphi\,drd\varphi$$
$$= \left[\frac{1}{6}r^6+\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi}_{=0} + \left[\frac{1}{6}r^6\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi$$
$$= -\frac{1}{18}\cdot\left[\cos^3\varphi\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Somit ist $A(f,\partial M) = 0$.

2. Variante (per Definition)

Der Ausfluss von f durch die Oberfläche ∂M ist durch

$$A(f,\partial M) = \iint_{\partial M} f \cdot n\,dO$$

definiert, wobei wir mit n den auf ∂M nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor bezeichnen. Die Oberfläche von ∂M lässt sich nicht komplett stetig differenzierbar parametrisieren. Da M ein durch den Graphen von ℓ nach oben und durch den Graphen von k nach unten begrenzter Kreiszylinder ist, können wir ∂M jedoch in drei Flächen (Mantel ∂M_M, Boden ∂M_k, Deckel ∂M_ℓ) aufteilen, welche man jeweils stetig differenzierbar parametrisieren kann. Es ist dann

$$\iint_{\partial M} f\cdot n\,dO = \underbrace{\iint_{\partial M_M} f\cdot n\,dO}_{=\text{Mantel}} + \underbrace{\iint_{\partial M_\ell} f\cdot n\,dO}_{=\text{Deckel}} + \underbrace{\iint_{\partial M_k} f\cdot n\,dO}_{=\text{Boden}}.$$

Mantel: Die durch $\Phi^M : \left\{(\varphi,z)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le\varphi\le 2\pi,\ -1\le z\le\cos\varphi\sin\varphi+1\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi^M(\varphi,z) = (\cos\varphi,\sin\varphi,z)^\top$ definierte Abbildung parametrisiert stetig differenzierbar die Mantelfläche des Zylinders. Es ist

$$\Phi^M_\varphi(\varphi,z) = (-\sin\varphi,\cos\varphi,0)^\top, \quad \Phi^M_z(\varphi,z) = (0,0,1)^\top$$

woraus sich

$$\left(\Phi_\varphi^M \times \Phi_z^M\right)(\varphi,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^\top$$

und

$$f(\Phi^M(\varphi,z)) = (1,0,z\cdot\cos\varphi)^\top$$

ergibt. Somit ist

$$\begin{aligned}\iint_{\partial M_M} f\cdot n\,dO &= \int_0^{2\pi}\int_{z=-1}^{\cos\varphi\sin\varphi+1}\cos\varphi\,dz d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi\right)d\varphi\\ &= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi + 2\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Deckel: Die durch $\Phi^\ell : [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi^\ell(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2\cos\varphi\sin\varphi+1)^\top$$

definierte Abbildung parametrisiert den Deckel des Zylinders. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_r^\ell(r,\varphi) &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r\cos\varphi\sin\varphi)^\top,\\ \Phi_\varphi^\ell(r,\varphi) &= \left(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right)^\top,\end{aligned}$$

woraus sich

$$\left(\Phi_r^\ell \times \Phi_\varphi^\ell\right)(r,\varphi) = (-r^2\sin\varphi, -r^2\cos\varphi, r)^\top$$

und

$$f(\Phi^\ell(r,\varphi)) = (1,0,r^4\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\cos\varphi)^\top$$

ergibt. Damit ist

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial M_\ell} f\cdot n\,dO = \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(-r^2\sin\varphi + r^5\cos^2\varphi\sin\varphi + r^3\cos\varphi\right)dr d\varphi\\ &= \left[-\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi}_{=0} + \left[\frac{1}{6}r^6\right]_0^1\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi + \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{=0}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Zum Schluss berechnen wir noch das Oberflächenintegral bezüglich des Bodens.

Boden: Die durch $\Phi^k : [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi^k(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, -r^2)^\top$ definierte Abbildung parametrisiert den Boden des Zylinders. Es ist

$$\Phi_r^k(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -2r)^\top, \quad \Phi_\varphi^k(r,\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)^\top$$

woraus sich

$$\left(\Phi_r^k \times \Phi_\varphi^k\right)(r,\varphi) = (2r^2\cos\varphi, 2r^2\sin\varphi, r)^\top$$

und

$$f(\Phi^k(r,\varphi)) = (1,0,-r^4\cos\varphi)^\top$$

ergibt. Damit der Normalenvektor nach außen zeigt, muss er noch mit -1 multipliziert werden. Somit ist

$$\begin{aligned}\iint_{\partial M_k} f\cdot n\,dO &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^5\cos\varphi - 2r^2\cos\varphi\right) dr\,d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{6}r^6 - \frac{2}{3}r^3\right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\iint_{\partial M_M} f\cdot n\,dO = \iint_{\partial M_\ell} f\cdot n\,dO = \iint_{\partial M_k} f\cdot n\,dO = 0$$

und damit insgesamt $A(f,\partial M) = 0$.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$(2x^2 - x)y' + y = 2x, \quad x > \frac{1}{2},$$

sowie die spezielle Lösung zum Anfangswert $y(1) = 2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Umformen ergibt

$$y' + \frac{1}{x(2x-1)}y = \frac{2x}{x(2x-1)}.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$y' + g(x)y = h(x)$$

mit

$$g(x) = \frac{1}{x(2x-1)}, \quad h(x) = \frac{2}{2x-1}.$$

Nach Satz 3.2.8 berechnen wir unter Verwendung einer Partialbruchzerlegung

$$G(x) = \int g(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \ln(2x-1) - \ln(x),$$

$$e^{-G(x)} = e^{\ln(x) - \ln(2x-1)} = \frac{x}{2x-1}$$

und erhalten damit die homogene Lösung

$$f_h(x) = C\frac{x}{2x-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Für die partikuläre Lösung verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$f_p(x) = k(x)\frac{x}{2x-1}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} k(x) &= \int h(x)e^{G(x)} \\ &= \int \frac{2}{2x-1}e^{\ln(2x-1)-\ln(x)}\,dx \\ &= \int \frac{2}{2x-1}\frac{2x-1}{x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x. \end{aligned}$$

Damit ist die gesamte Lösung

$$f(x) = (C + k(x))e^{-G(x)} = (C + 2\ln x)\frac{x}{2x-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ folgt durch Einsetzen $C = 2$ und damit die spezielle Lösung

$$y(x) = (2 + 2\ln x)\frac{x}{2x-1}.$$

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = 4(\sinh(x))^2 + 2 \ .$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Zuerst muss die homogene Lösung bestimmt werden. Aus $y'' - y' - 2y = 0$ ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Die homogene Lösung lautet daher

$$f_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Um die inhomogene Lösung zu bestimmen, bietet es sich an, die rechte Seite umzuformen:

$$h(x) = 4(\sinh(x))^2 + 2 = 4\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 + 2 = e^{2x} + e^{-2x} \ .$$

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten:

- **Ansatz nach Art der rechten Seite**

  Hier wird das Superpositionsprinzip angewendet, d.h. es werden partikuläre Lösungen zu den beiden Störfunktionen $h_1(x) = e^{2x}$ und $h_2(x) = e^{-2x}$ gesucht. Dazu wird der Ansatz nach Art der rechten Seite genutzt.

  1. Störfunktion h_1:
     Zunächst wird die Störfunktion $h_1(x) = e^{2x}$ betrachtet. Da das charakteristische Polynom die einfache Nullstelle 2 hat (Resonanz) und der polynomiale Faktor der Störfunktion vom Grad 0 ist, besitzt der Ansatz für die partikuläre Lösung die Form

     $$f_{p1}(x) = axe^{2x}$$

     mit den Ableitungen

     $$f'_{p1}(x) = a(1+2x)e^{2x} \qquad \text{und} \qquad f''_{p1}(x) = a(4+4x)e^{2x} \ .$$

     Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

     $$a(4+4x)e^{2x} - a(1+2x)e^{2x} - 2axe^{2x} = 3ae^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x} = h_1(x) \ ,$$

     was auf $a = \frac{1}{3}$ führt. Alternativ kann der Operatorenkalkül verwendet werden:

     $$\begin{aligned} (D+1)(D-2)axe^{2x} &\stackrel{!}{=} e^{2x} \\ e^{2x}(D+3)D(ax) &\stackrel{!}{=} e^{2x} \\ (D+3)a &\stackrel{!}{=} 1 \\ 3a &\stackrel{!}{=} 1, \end{aligned}$$

was ebenfalls $a = \frac{1}{3}$ liefert. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_{p1} = \frac{1}{3} x e^{2x} \,.$$

2. Störfunktion h_2:
   Die zweite Störfunktion lautet $h_2(x) = e^{-2x}$. Da -2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und der polynomiale Faktor der Störfunktion Grad 0 hat, besitzt der Ansatz für die partikuläre Lösung die Form

   $$f_{p2}(x) = a e^{-2x}$$

   mit den Ableitungen

   $$f'_{p2}(x) = -2a e^{-2x} \qquad \text{und} \qquad f''_{p2}(x) = 4a e^{-2x} \,.$$

   Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

   $$4a e^{-2x} + 2a e^{-2x} - 2a e^{-2x} = 4a e^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x} = h_2(x) \,,$$

   was auf $a = \frac{1}{4}$ führt. Damit lautet die partikuläre Lösung

   $$f_{p2} = \frac{1}{4} e^{-2x} \,.$$

- **Variation der Konstanten**

  Der Ansatz $f_p(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{-x}$ führt auf

  $$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

  Umformen liefert

  $$\begin{pmatrix} 3e^{2x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} + e^{-2x} \\ e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}$$

  und damit

  $$c'_1(x) = \frac{1}{3}\left(1 + e^{-4x}\right), \quad c'_2(x) = -\frac{1}{3}\left(e^{3x} + e^{-x}\right).$$

  Integration ergibt

  $$c_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} e^{-4x}, \quad c_2(x) = -\frac{1}{9} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-x}$$

  und damit die partikuläre Lösung

  $$f_p(x) = \frac{1}{3} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{9} e^{2x}.$$

Insgesamt erhält man die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- **1. Variante (mit Minimalpolynom)** (siehe Satz 6.3.7)

  Wir erhalten

  $$v = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

  und damit $A^2 v + 4v = 0$. Das zugehörige Polynom

  $$p(X) = X^2 + 4$$

  hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 2i$, und damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

  $$g_1(x) = \cos(2x), \quad g_2(x) = \sin(2x).$$

  Die zugehörige Wronski-Matrix ist

  $$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}$$

  mit

  $$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

  $$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

- **2. Variante (mit charakteristischem Polynom)** (siehe Satz 6.3.4)

  Wie oben erhalten wir

  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(X) = (2-X)\,((1-X)(-1-X)+5) = (2-X)(X^2+4)$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 2i$, $\lambda_3 = 2$. Das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung lautet damit

$$g_1(x) = \cos(2x), \quad g_2(x) = \sin(2x), \quad g_3(x) = e^{2x}.$$

Die zugehörige Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) & e^{2x} \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) & 2e^{2x} \\ -4\cos(2x) & -4\sin(2x) & 4e^{2x} \end{pmatrix},$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ \cos(2x)+2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*
Gegeben ist die 2-periodische Funktion f mit

$$f(x) = x + \sin(\pi x) \quad \text{für} \quad -1 \leq x < 1 \quad \text{und} \quad f(x+2) = f(x).$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.

(b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Da $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung. Damit ist $a_0 = a_n = 0$ für alle n.

Um die anderen Koeffizienten zu berechnen, bietet es sich an, die Summanden x und $\sin(\pi x)$ getrennt zu betrachten. Für den ersten Teil erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{b}_n &= \int_{-1}^{1} x\sin(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx \\
&= \left[-\frac{2}{n\pi}x\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1 = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand $\sin(\pi x)$ ist schon in Form einer Fourierreihe gegeben.

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sin(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x) \\
&= \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\sin(\pi x) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x)
\end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist nur an den Punkten $\{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$ unstetig. An allen anderen Punkten konvergiert die Fourierreihe folglich gegen den Funktionswert, während sie an den Sprungstellen gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$ konvergiert. Der Grenzwert der Fourierreihe ist also die 2-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\begin{cases} x + \sin(x), & \text{für} \quad -1 < x < 1, \\ 0, & \text{für} \quad x = -1. \end{cases}$$