

Klausur der Modulprüfung / Diplomvorprüfungfür **Dipl. aer**Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift, Grün- oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In den **Aufgaben 3 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und die Matrikelnummer.
- In den **Aufgaben 1 – 2** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 04.05.2011 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht wird voraussichtlich am 06.05.2011 stattfinden, Ort und Uhrzeit werden auf www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM3-Kuehnel-WS1011/ bekannt gegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich **persönlich** vom 11.05.2011 bis zum 13.5.2011 bei Marcel Bliem (V57 8.155, bliem@mathematik.uni-stuttgart.de) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Die mündlichen Nachprüfungen finden vom **24.05.2011 bis 26.05.2011** statt.

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Aufgabe 1 (6 + 4 = 10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung des reellen Anfangswertproblems

$$y' = 2y^2 \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}, \quad y(0) = -1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx =$$

$$y(x) =$$

(b) Lösen Sie das komplexe Anfangswertproblem

$$y'' + 2iy' - y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_1 =$$

$$\lambda_2 =$$

Lösung

$$y(x) =$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}$ von $f(x) = e^{-|x|}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte zu $g(x) = (x - a)f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

$$\hat{g}(\omega) =$$

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 Punkte)

Gegeben seien der Zylinder Z und die Kugeloberfläche K mit

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\} \quad \text{und} \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Betrachtet wird das Flächenstück $M = Z \cap K$ und das Vektorfeld $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{X}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^2(1 + y^2) \\ xyz^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ xy^2z + xz \end{pmatrix}.$$

Eine Parametrisierung Φ von K ist

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2 \cos \varphi \sin \vartheta, 2 \sin \varphi \sin \vartheta, 2 \cos \vartheta), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

- (a) Skizzieren Sie M als Teilfläche von K und berechnen Sie die Länge der Randkurve ∂M .
 (b) Bestimmen Sie eine Teilmenge $D \subset [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, so dass $\Phi(D) = M$.
 (c) Bestimmen Sie eine Normale $\vec{n}(\varphi, \vartheta)$ an M mit positiver dritter Koordinate.
 (d) Berechnen Sie $\text{rot } \vec{X}$.
 (e) Berechnen Sie

$$\int_{\partial M} \vec{X} \cdot d\vec{x}$$

mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei ∂M bezüglich \vec{n} positiv umlaufen wird.

Hinweis:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 4 (8 + 7 = 15 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} Y(t)$$

sowie die spezielle Lösung $\tilde{Y}(t)$ mit $\tilde{Y}(0) = (0, 0, 1)$.

- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 4u'(t) + 3u(t) = 8e^{-t}, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

Aufgabe 5 (4 + 6 + 6 = 16 Punkte)

Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 3x^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Bereich, in dem f von Null verschieden ist und weisen Sie nach, dass es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.
- (b) Zeigen Sie, dass X und Y stochastisch abhängig sind. Bestimmen Sie des weiteren die Standardabweichung von X .
- (c) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X > \frac{1}{3} | 2X + Y < 1)$