

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau**, **immo**, **tpbau**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle acht Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4-Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengegeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 – 3** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bei den **Aufgaben 4 – 8** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein. In **Aufgabe 4 und 5** wird für jedes richtig gesetzte Kreuz ein Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz ein Minuspunkt vergeben. Die Aufgaben als Ganzes können jedoch nicht mit weniger als 0 Punkten bewertet werden.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 7. 10. 2002 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 10. 2002 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte): Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 6y' + 5y = 0. \quad (1)$$

- a) Stellen Sie das charakteristische Polynom der Gleichung (1) auf und berechnen Sie dessen Nullstellen. Geben Sie die allgemeine reelle Lösung von (1) an.
- b) Welche Lösung y von (1) erfüllt $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$?
Berechnen Sie $\int y(x) dx$ und $\int_0^{\infty} y(x) dx$.
- c) Bestimmen Sie mit Hilfe spezieller Ansätze eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 6y' + 5y = 1 + e^{-x}.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte): Die Quadrik Q_1 im \mathbb{R}^3 sei gegeben durch die Gleichung

$$Q_1 : x_1^2 + 20x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 + 24x_2x_3 - 14x_2 + 7x_3 - 7 = 0.$$

- a) Schreiben Sie Q_1 in Matrixform

$$Q_1 : x^t Ax + 2a^t x + c = 0,$$

mit einer symmetrischen Matrix A und $x = (x_1, x_2, x_3)^t$.

Zeigen Sie, daß $v_1 = (2, 3, 6)^t$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 28$ ist. Berechnen Sie alle weiteren Eigenwerte von A .

- b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q_2 : x^t Ax = 0$ an und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T , so daß $T^t AT$ Diagonalgestalt besitzt.
Skizzieren Sie Q_2 im Koordinatensystem der Normalform.
- c) Berechnen Sie die euklidische Normalform von Q_1 . Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich?
-

Aufgabe 3 (5 Punkte): Untersuchen Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren bzw. divergieren. Berechnen Sie für jede konvergente Reihe den zugehörigen Grenzwert.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{2n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

Name:

Matrikel-Nr.:

Fach: bau enan famo immo mach tema umw

Aufgabe 4 (4 Punkte): Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf $[0, 1]$ und differenzierbar auf $(0, 1)$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

f streng monoton wachsend $\implies f^{-1}$ streng monoton fallend wahr falsch

$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$, für alle $\xi \in (0, 1)$ wahr falsch

Es gibt ein $\xi \in (0, 1)$ mit $f(0) - f(1) + f'(\xi) = 0$ wahr falsch

f integrierbar $\implies \int 2^{f(x)} dx = \frac{1}{f(x)+1} 2^{f(x)+1}$ wahr falsch

Aufgabe 5 (4 Punkte): Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $S : Ax = b$ das zugehörige lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

$m > n \implies S$ ist nicht lösbar wahr falsch

$\text{Rg } A \leq \min(m, n)$ wahr falsch

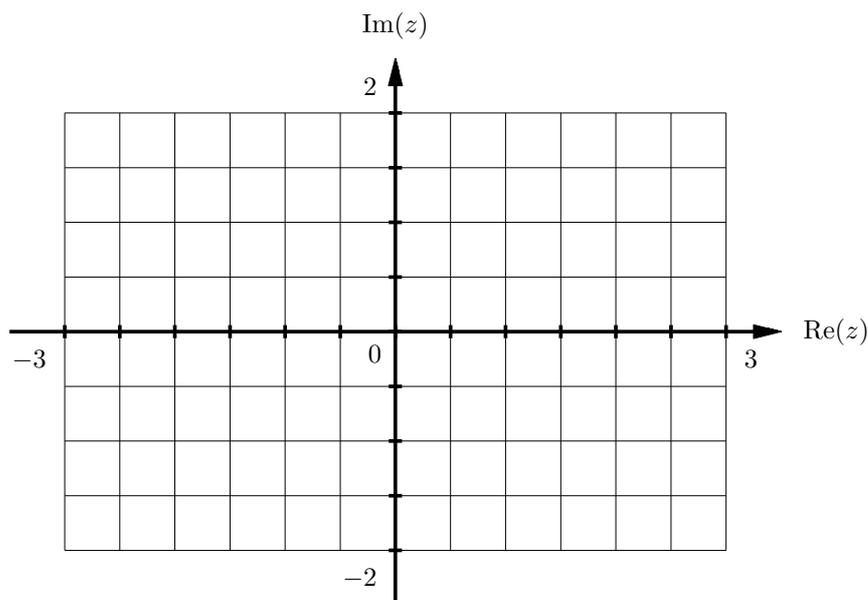
y ist Lösung von $S \implies y^t A^t A y = |b|^2$ wahr falsch

$A^t A$ symmetrisch $\implies S$ ist lösbar wahr falsch

Aufgabe 6 (3 Punkte): Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - z - \bar{z} + 3\text{Im}(z)^2 \leq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 1\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (4 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \boxed{}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 8n + 1} - 2n \right) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - \cos(x-1)}{\sqrt{x} - 1} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 5}{x^3 + x^2 + x + 1} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (10 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x) + 2}$.

a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie und Periodizität.

Das Schaubild von f ist

punktsymmetrisch zum Ursprung	<input type="radio"/>
achsensymmetrisch zur y -Achse	<input type="radio"/>
weder punkt- noch achsensymmetrisch	<input type="radio"/>

f ist

nicht periodisch	<input type="radio"/>	
periodisch	<input type="radio"/>	

mit der Periodenlänge

b) Berechnen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $[0, 2)$.

N_1 (| 0) N_2 (| 0)

c) Berechnen Sie die Ableitung von f . $f'(x) = \boxed{}$

d) Berechnen Sie alle Extrempunkte von f im Intervall $[0, 2)$, und geben Sie an, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

E_1	()	E_1 ist	lokales Maximum <input type="radio"/>
			lokales Minimum <input type="radio"/>
E_2	()	E_2 ist	lokales Maximum <input type="radio"/>
			lokales Minimum <input type="radio"/>

e) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f . $F(x) = \boxed{}$

f) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{-e}^e f(x) dx = \boxed{} \qquad \int_{234}^{235} f(x) dx = \boxed{}$$