Klausur zur Höheren Mathematik 1 und 2

für Fachrichtungen: kyb, phys, mech, etech, techpaed el

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 15 eigenhändig beschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner und Handys nicht erlaubt.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei den **Aufgaben 1 - 4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
  Bei den **Aufgaben 5 - 8** sind nur die Ergebnisse bzw. am **Ende von Aufgabe 8** eine Begründung verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 18. 04. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **27. 04.** bis **29. 04. 2011** mit Frau Dr. Monika Schulz (Raum V 57.8.126) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*12 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass -1 und 5 die einzigen Eigenwerte von A sind.

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von A.

c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $D = T^{\mathsf{T}}AT$.

d) Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik mit der Gleichung

$$4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3 = 0.$$

Skizzieren Sie die Quadrik im Koordinatensystem der Normalform.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Gegeben sei in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g(x,y,z) = \big((1+x)e^x + \cos z, (k^2-1)x + k, -x\sin z\big)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Divergenz des Vektorfeldes.

b) Bestimmen Sie für das Vektorfeld den maximalen Definitionsbereich. Für welche k handelt es sich um ein Gradientenfeld? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie für $k = 1$ eine Potentialfunktion $U(x,y,z)$.

d) Man bestimme ein Potential U von g mit $U(1,0,0) = 0$.

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = (-1,0,2), B = (-1,0,1), D = (1,-1,4) \text{ sowie die Kurve } C(t) = \{(1,-t,t^2); t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Berechnen Sie eine Gleichungsdarstellung der Ebene E , in der die Punkte A, B und D liegen. Geben Sie einen Normalenvektor von E an.

b) Berechnen Sie den Abstand von $C(t)$ von B.

c) Sei g_t die Gerade durch D und $(1,-t,t^2)$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Geraden g_t und AB parallel? Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, so dass sich g_t und AB in einem Punkt schneiden ?

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2 - 5n + 3$. Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge streng monoton wachsend? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Bestimmen Sie $\inf\{\frac{1}{2+a_n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Gegeben sei die reellwertige Funktion $f(x,y) = 4x^3 - 3y^2 + 3xy^2 - 12x^2 + 1$.

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ der Funktion f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{} .$$

b) Bestimmen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}\, f(x,y)$ der Funktion f.

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \boxed{} .$$

c) Berechnen Sie im Punkt $P = (1,1)$ den Wert der Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{3}(1,7)^T$.

$$\partial_v f(1,1) = \boxed{} .$$

d) Berechnen Sie alle kritischen Punkte der Funktion.

$$\boxed{} .$$

e) Bei welchen Punkten handelt es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt?

$$\boxed{}$$

Aufgabe 6 (*12 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^3 - 8x + 5}{(x^2-4)(x^2+1)}$.

a) Kreuzen Sie den geeigneten Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung von f an:

$f(x) = \dfrac{a}{x-4} + \dfrac{b}{x^2-4} + \dfrac{c+dx}{x^2+1}$	☐	$f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2-4} + \dfrac{c+dx}{x^2+1}$	☐
$f(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c+dx}{x^2+1}$	☐	$f(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{x+1}$	☐

b) Berechnen Sie die Koeffizienten: $a =$ ☐ , $b =$ ☐ ,c= ☐ , $d =$ ☐ .

c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von der Funktion f.

$$F(x) = \boxed{}$$

d) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 - 8i = 0$. Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $x = re^{i\varphi}$, $r \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$, als auch in der Form $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{}$$

Aufgabe 7 (*9 Punkte*) Gegeben ist die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. $\chi_A(\lambda) =$ ☐

b) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix A mit den zugehörigen algebraischen Vielfachheiten an.

☐

c) Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A und die Jordan-Normalform von A in Abhängigkeit von t an.

Parameter t	Eigenwerte von A mit geometrischer Vielfachheit	Jordan-Normalform von A

Aufgabe 8 (*9 Punkte*) Berechnen Sie, falls sie existieren, die folgenden Funktionsgrenzwerte, Reihen und uneigentlichen Integrale. Tragen Sie andernfalls „divergent" ein.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}} =$ ☐ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{2 - 2\cos(\frac{x}{2})} =$ ☐

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}} =$ ☐ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} =$ ☐

e) $\int_0^{\infty} \dfrac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐ **f)** $\int_0^{\infty} \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

Begründung der Fälle mit Divergenz:

☐
