Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **kyb, mecha, phys, Dipl el**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 20 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 5 – 8** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 18. 04. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **27. 04.** bis **29. 04. 2011** mit M. Boßle (Raum V 57.8.158) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*13 Punkte*) Gegeben ist der Körper

$$K: \quad x \geqq 0 \quad y \geqq 0 \quad 2 \geqq z \geqq 0 \quad 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq (2-z)^2$$

und das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = (z^2 - 4,\ xy + z,\ xy + 4)^\intercal$$

a) Geben Sie eine Beschreibung von K in Zylinderkoordinaten an und skizzieren Sie K.

b) Berechnen Sie das Volumen von K und bestimmen Sie die x- und y-Koordinate des Schwerpunkts von K.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Integralsatzes den Fluss von g durch den Rand von K von Innen nach Außen.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

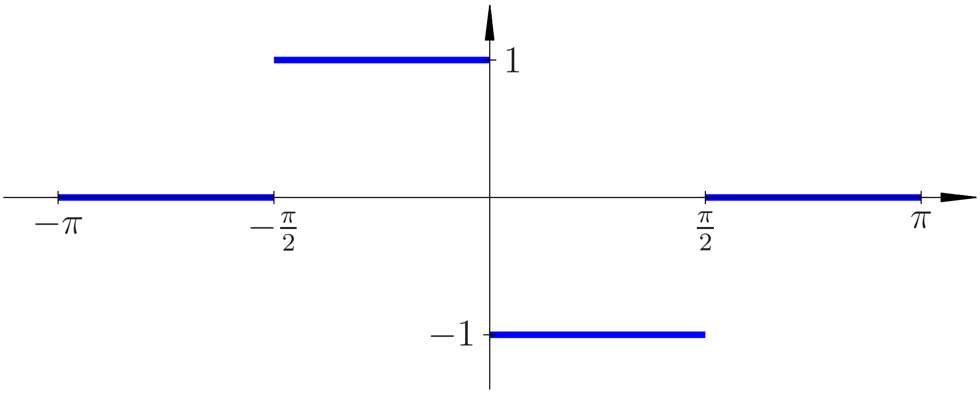
$$\cos x - ay + (4ye^{-y} + (b-1)\sin x)y' = 0.$$

a) Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt?

b) Für $a = 0, b = 2$ existiert ein von x oder ein von y abhängiger integrierender Faktor. Geben Sie die Differentialgleichung für $\mu(x)$ oder $\mu(y)$ an und bestimmen Sie hieraus den integrierenden Faktor. Wie lautet die exakte Differentialgleichung?

c) Geben Sie die allgemeine Lösung $f(x, y)$ der Differentialgleichung im Fall $a = 0, b = 2$ in der Form $f(x, y) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch folgenden Graphen gegeben.



a) Geben Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von f an (Terme der Form $\cos(n\frac{\pi}{2})$ bzw. $\sin(n\frac{\pi}{2})$ müssen in Ergebnissen nicht weiter umgeformt werden).

b) Geben Sie an, in welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ die Fourier-Reihe gegen die Funktion f konvergiert.

c) Bestimmen Sie durch Einsetzen von $x = \dfrac{\pi}{2}$ in die Fourier-Reihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\,.$$

Aufgabe 4 (*13 Punkte*)

Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$y \cdot u_{xx} = u_y\ ,$$

welche die Bedingungen $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ erfüllen und die Form $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ besitzen.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld $g_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem reellen Parameter a

$$g_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} axy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g_a$:

$$\operatorname{rot} g_a = \boxed{}\,.$$

b) Geben Sie eine Parametrisierung der Strecke C_1 vom Punkt $P = (0,0,0)$ nach $Q = (1,1,1)$ an in Anhängigkeit vom Parameter t.

$$C_1(t) = \boxed{}\,.$$

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve C_1.

$$L(C_1) = \boxed{}\,.$$

d) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int_{C_1} g_a \, dx \quad = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, dt \quad = \boxed{}\,.$$

e) Für welchen Wert des Parameters a besitzt das Vektorfeld g_a ein Potential?

$$a_0 = \boxed{}\,.$$

f) Für welchen Wert von $c \in \mathbb{R}$ ist $u(x,y,z) = x^2y - cxz^3 + 3yz$ eine Potentialfunktion von g_{a_0}?

$$c = \boxed{}\,.$$

g) Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int_{C_2} g_{a_0} \, dx$ längs einer beliebigen Kurve C_2 von dem Punkt $P_1 = (1,1,2)$ zum Punkt $P_2 = (3,5,0)$.

$$I = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 6 (*9 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = f(x)$.

a) Stellen Sie für $f(x) = 0$ das charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen. Hinweis: Die Nullstellen sind ganzzahlig.

$p(\lambda) = \boxed{}$ Nullstellen: $\boxed{}$

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung an:

c) Geben Sie einen Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = 5e^{2x}$ an und berechnen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(x)$.

Ansatz = $\qquad$ $y_p(x) =$

d) Wie lautet die Laplace-Transformierte der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 3$?

$L(y)(s) =$

Aufgabe 7 (*10 Punkte*) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $Y' = AY + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -3 & 1/2 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} x \\ 6x \\ 3x \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten

und die zugehörigen Eigenräume sind

Eine Transformationsmatrix T, die A auf Jordan-Normalform transformiert, lautet

$T =$.

Somit ist die Lösung des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems

$Y_h(x) =$.

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems lautet

$Y_p(x) =$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*13 Punkte*) Gegeben ist die komplexwertige Funktion

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+4}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Pole von f.

b) Berechnen Sie an jedem Pol das Residuum von f.

c) Sei K_r in der komplexen Zahlenebene der positiv orientierte Kreis um 0 mit Radius r. Berechnen Sie

$$I_1 = \oint_{K_1} f(z)\,dz \quad \text{und } I_3 = \oint_{K_3} f(z)\,dz.$$

$I_1 =$ $\qquad$ $I_3 =$.

d) Für $R \geqq 3$ bezeichne in der oberen Halbebene H_R den Halbkreis um 0 vom Radius R, der von R nach $-R$ im positiven Sinn durchlaufen werde. Zeigen Sie:

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{H_R} f(z)dz \;=\; 0.$$

e) Bezeichne D_R den durch die Strecke von $-R$ nach R abgeschlossenen Halbkreis H_R, der positiv orientiert sei. Berechnen Sie für $R \geqq 3$

$$\oint_{D_R} f(z)dz =$$

f) Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4}dx =$$

g) Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cdot e^4 \cdot \cos 2x}{x^2+4}dx =$$