Klausur der Modulprüfung / Diplomvorprüfung

für **B.Sc. geod**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift, Grün- oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In den **Aufgaben 3 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und die Matrikelnummer.
- In den **den Aufgaben 1 – 2** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 20.10.2011 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht wird voraussichtlich am 25.10.2011 stattfinden, Ort und Uhrzeit werden auf `www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM3-Kuehnel-WS1011/` bekannt gegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich **persönlich** vom 26.10.2011 bis zum 31.11.2011 bei Tillmann Jentsch (V57 7.556, `jentsch@mathematik.uni-stuttgart.de`) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Die mündlichen Nachprüfungen finden vom **04.11.2011 bis 15.11.2011** statt.

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Aufgabe 1 ($1+1+1+1+2=6$ *Punkte*)

Geben Sie bei den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Für jede falsche Antwort gibt es einen Punkt Abzug, die Aufgabe kann aber insgesamt nicht mit weniger als 0 Punkten bewertet werden.

(a) Wenn die Fourierreihe der periodischen und stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall gegen f konvergiert, dann konvergiert deren summandenweise abgeleitete Reihe überall gegen die Ableitung von f.

(b) Die Differentialgleichung

$$y' = e^{3x+4y} \cos x$$

ist separierbar (d.h. durch Trennung der Variablen zu lösen).

(c) Jede Raumkurve, bei der alle Punkte einen konstanten Abstand von einer festen Geraden haben, hat eine konstante Krümmung.

(d) Krümmung und Torsion einer Raumkurve bestimmen zusammen die Kurve eindeutig bis auf euklidische Bewegungen im Raum.

(e) Es gibt einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$ für die Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3 y)y'$$

Aufgabe 2 ($2+5+3=10$ *Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=t^2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h''(t)+2y_h'(t)+y_h(t)=0\,.$$

$y_h(t) =$

(b) Finden Sie durch einen geeigneten Ansatz eine partikuläre Lösung $y_p(t)$.
Ansatz:

$y_p(t) =$

Partikuläre Lösung:

$y_p(t) =$

(c) Finden Sie die spezielle Lösung $\tilde{y}(t)$ mit $\tilde{y}(0)=\tilde{y}'(0)=0$ der inhomogenen Gleichung.

$\tilde{y}(t) =$

Aufgabe 3 ($2+7=9$ *Punkte*)

Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ als die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad -\pi\le x<\pi\,.$$

(a) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion auf dem Intervall $(-2\pi,2\pi)$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

Hinweis: Es gilt

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big) \qquad \cos(\alpha)\sin(\beta)=\tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\big)$$

Aufgabe 4 ($2+3+3+4 = 12$ *Punkte*)

Gegeben ist die Fläche

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \max\bigl(|x|,|y|\bigr) \le \tfrac{\pi}{2}\,,\ z = \cos(x)\cos(y)\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie den Rand ∂F in der x,y-Ebene.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $\Phi(u,v)$ der Fläche F und geben Sie ein Normalenvektorfeld $\vec{n}(u,v)$ mit positiver z Koordinate an.

(c) Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} z^2 + y(z + x - 3x^2) \\ xz + \frac{1}{2}x^2 + \sin(y^2) \\ xy + 2xz \end{pmatrix}.$$

(d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial F} \vec{X} \cdot d\vec{r}\,,$$

wobei ∂F bezüglich $\vec{n}$ positiv umlaufen wird.

Aufgabe 5 (11 *Punkte*)

Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} Y(t)$$

sowie die allgemeine reelle Lösung und die spezielle reelle Lösung $\tilde{Y}(t)$ mit $\tilde{Y}(0) = (4,1,2)$.

Aufgabe 6 ($4+4+4 = 12$ *Punkte*) Aus der Kurve

$$c(u) = \bigl(\cos u\,,\ \sin u\,,\ u\bigr)$$

ergibt sich mit $\dot{c}(u) = \frac{dc}{du}$ die Regelfläche

$$f(u,v) = c(u) + v \cdot c'(u) = c(u) + v \cdot \frac{\dot{c}(u)}{\|\dot{c}(u)\|}.$$

(a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform und bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Fläche f regulär ist.

(b) Bestimmen Sie eine Einheitsnormale, sowie die zugehörige zweite Fundamentalform und die Gauß-Krümmung.

(c) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden $f(0,v)$ und $f(\frac{\pi}{2},v)$ zueinander windschief sind (d.h. sie sind nicht parallel und schneiden sich nicht).