Künzer Samstag, 20.08.2011

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur

Aufgaben, die **mit I gekennzeichnet** sind, gehören zu Mathematik I. Wer **nur** für Mathematik I angemeldet ist, bearbeitet **nur diese** Aufgaben. Dies gilt auch für fachübergreifende Schlüsselqualifikanden.

Aufgaben, die **mit II gekennzeichnet** sind, gehören zu Mathematik II. Wer **nur** für Mathematik II angemeldet ist, bearbeitet **nur diese** Aufgaben.

Wer für Mathematik I und II angemeldet ist, bearbeitet alle Aufgaben.

Bearbeitungszeit: Wenn Teil I und II bearbeitet wird: 180 Minuten.

Wenn nur Teil I oder II bearbeitet wird: 120 Minuten.

Zulässige Hilfsmittel: Zwei beliebig beschriebene Blätter DIN A4 und ein nichtprogrammierter Taschenrechner.

Bitte eigenes **Papier** verwenden und jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer versehen.

Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren **Lösungsweges** können nicht gewertet werden.

Soll eine Lösung **auf n Nachkommastellen genau** angegeben werden, so heißt dies, die verlangte näherungsweise Lösung soll von der tatsächlichen Lösung einen Abstand kleiner 10^{-n} aufweisen.

Das Argument für Sinus oder Cosinus ist im **Bogenmaß** zu nehmen; also z.B. $\sin(\pi/2) = 1$. Taschenrechner entsprechend einstellen!

Teil I

Aufgabe I.1 (6 Punkte)

Sei $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ für $x \in \mathbf{R}$.

Bestimme alle lokalen Extremstellen von $f(x)$. Unterscheide hierbei nach lokalen Minimal- und Maximalstellen.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Wir legen 100 Euro festverzinslich an zu einem monatlichen Zinssatz von 0,2 Prozent mit einer zusätzlichen monatlichen Sparrate von 1 Euro, welche jeweils am Monatsende eingezahlt wird.

Nach wievielen Monaten beträgt das Kapital erstmals 200 Euro oder mehr?

Aufgabe I.3 (6 Punkte)

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{3\times 3}$.

Bestimme A^2 und die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Zeige mit Induktion, daß $\sum_{k=2}^{n}(4k-7) = 2n^2 - 5n + 3$ ist für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 2}$.

Aufgabe I.5 (6 Punkte)

Berechne $\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ mittels Partialbruchzerlegung.

Das Ergebnis ist näherungsweise auf 4 Nachkommastellen genau anzugeben.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Bestimme $\int_0^u x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ für $u \in \mathbf{R}$ unter Zuhilfenahme der Produktregel.

Teil II

Aufgabe II.1 (6 Punkte)

Erfahrungsgemäß werden auf einem Markt $f(x) := 10 \cdot 2^{-x/100}$ Tonnen Edelmetall nachgefragt, wenn der Verkäufer den Gewinn zu x Euro pro Tonne ansetzt. Es kann die Nachfrage auch immer voll befriedigt werden.

Bestimme die Elastizität von $f(x)$ und von $f'(x)$.

Wie hat der Verkäufer den Gewinn pro Tonne anzusetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren?

Wenn eine Aussage aus der Vorlesung verwandt werden soll, so sind auch deren Voraussetzungen im vorliegenden Fall zu überprüfen. Die Lösung ist auf 2 Nachkommastellen genau in Euro pro Tonne anzugeben.

Aufgabe II.2 (6 Punkte)

Bestimme die Nullstelle ξ von $f(x) := x^2 - \cos(x)$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$ näherungsweise mit dem Newtonverfahren.

Überprüfe zuerst die Voraussetzungen für das Newtonverfahren.

Führe dann das Newtonverfahren so lange durch, bis $|f(x_n)| \leqslant 10^{-3}$ ist.

Gib ein solches x_n auf 4 Nachkommastellen genau an.

Aufgabe II.3 (10 Punkte)

Sei $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + xz + z^2 + xyz$ auf $\mathbf{R}^3$.

Sei $g_1(x, y, z) := xy + 3xz - 3$ auf $\mathbf{R}^3$.

(1) Ist $(0, 0, 0)$ eine lokale Extremstelle von f ? Wenn ja, was für eine ?

(2) Ist $(1, 0, 1)$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g_1 = 0$? Wenn ja, was für eine ?

Aufgabe II.4 (6 Punkte)

Bestimme die Lösung $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ der Differentialgleichung $y' = y + \mathrm{e}^{2x} \cos(x)$ mit $y(0) = 0$.

Verwende in einem der dazu erforderlichen Integrale die Eulersche Formel zum Auffinden einer Stammfunktion. In der Lösung sollen dagegen nur reelle Zahlen als Koeffizienten etc. auftreten.

Aufgabe II.5 (6 Punkte)

Bestimme die Lösung $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ der Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = x^2$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.