Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*
Gegeben seien die beiden Mengen

$$M_1 := \Big(\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4,\ x-4 \le y \le \tfrac{1}{4}(x-4)^2\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \le x \le 0,\ -\tfrac{1}{4}(x+4)^2 \le y \le x+4\big\}\Big)$$

und

$$M_2 := [-4,4] \times [-1,1]\,.$$

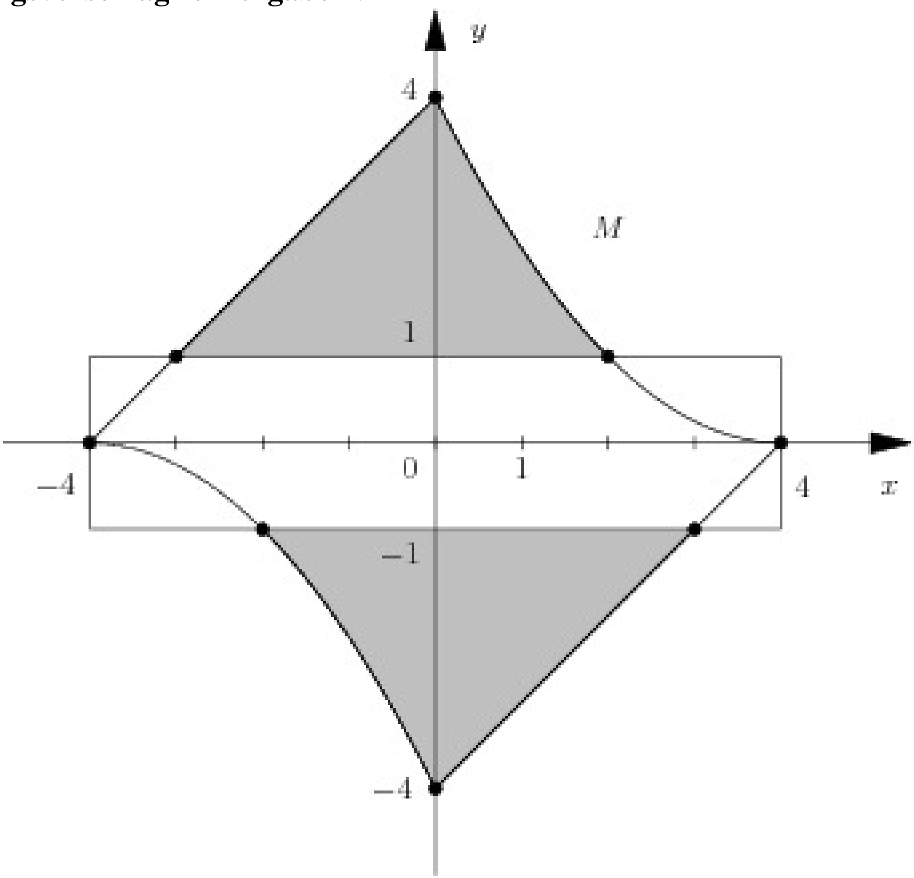
Mit diesen Mengen bilden wir $M := M_1 \setminus M_2$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze von M an.

(b) Bestimmen Sie für $f(x,y) = |x|$ den Wert des Integrals

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{dxdy}\,.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:



(a)

(b) Aufgrund der Symmetrie von M und $f(x) = |x|$ gengt es, f ber $M \cap H^+$ mit $H^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ zu integrieren:

$$\iint_M f(x,y)dx\,dy = 2 \cdot \iint_{M \cap H^+} |x| dx\,dy.$$

Wir setzen zur Vereinfachung $g(x) = x + 4, p(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2$ und zerlegen $M \cap H^+$ in die zwei Bereiche

$$N_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau_1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq g(x)\},$$
$$N_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \tau_2, 1 \leq y \leq p(x)\},$$

wobei $\tau_1 = -3$ und $\tau_2 = 2$ die Lösungen von $g(x) = 1$ sowie $p(x) = 1$ sind.

Somit ist

$$\begin{aligned}\iint_M f(x,y)dx\,dy &= 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{2} \iint_{N_j} |x| dx\,dy \right) \\ &= 2 \left(\underbrace{-\int_{-3}^{0} \int_{y=1}^{g(x)} x\,dy\,dx}_{=A} + \underbrace{\int_{0}^{2} \int_{y=1}^{p(x)} x\,dy\,dx}_{=B} \right).\end{aligned}$$

A berechnen wir durch

$$\begin{aligned}A &= -\int_{-3}^{0} \int_{y=1}^{g(x)} x\,dy\,dx = -\int_{-3}^{0} [xy]_1^{g(x)} dx \\ &= -\int_{-3}^{0} (x(x+4) - x)\,dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0} = \frac{9}{2},\end{aligned}$$

und analog dazu B

$$B = \int_0^2 \int_{y=1}^{p(x)} x\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x\right) dx = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{5}{3}.$$

Somit erhalten wir:

$$\int_M |x| dx\,dy = 2 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{5}{3}\right) = \frac{37}{3}.$$

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + 9y = 3\sin(3x) \; .$$

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung f, welche die Bedingungen

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{4}\pi$$

erfüllt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Zuerst muss die homogene Lösung bestimmt werden. Aus $y'' + 9y = 0$ ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 + 9 = (X + 3i)(X - 3i)$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Die homogene Lösung lautet daher

$$f_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Um die inhomogene Lösung zu bestimmen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- **Variante 1: komplexer Ansatz**

  Anstelle von h wird zunächst die komplexe Störfunktion

  $$\tilde{h}(x) = 3e^{3ix}$$

  betrachtet. Nach Art der rechten Seite erhält man für die partikuläre Lösung $\tilde{f}_p$ der komplexen Störfunktion den Ansatz

  $$\tilde{f}_p(x) = axe^{3ix} \; ,$$

  da ein Resonanzfall vorliegt. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit dem Operatorenkalkül

  $$\begin{aligned} (D+3i)(D-3i)axe^{3ix} &\stackrel{!}{=} 3e^{3ix} \\ e^{3ix}(D+6i)D(ax) &\stackrel{!}{=} 3e^{3ix} \\ (D+6i)a &\stackrel{!}{=} 3 \\ 6ia &\stackrel{!}{=} 3 \end{aligned}$$

  und somit $a = -\frac{i}{2}$. Für die partikuläre Lösung $\tilde{f}_p$ ergibt sich also

  $$\tilde{f}_p(x) = -\frac{i}{2}xe^{3ix} = \frac{1}{2}x\sin(3x) - \frac{i}{2}x\cos(3x) \; .$$

  Da $h(x) = \mathrm{Im}(\tilde{h}(x))$ folgt für die partikuläre Lösung f_p zur Störfunktion h

  $$f_p(x) = \mathrm{Im}(\tilde{f}_p(x)) = -\frac{1}{2}x\cos(3x) \; .$$

- **Variante 2: reeller Ansatz**

  Nach Art der rechten Seite erhält man für die partikuläre Lösung f_p der reellen Störfunktion den Ansatz

  $$f_p(x) = ax\sin(3x) + bx\cos(3x)\ ,$$

  da ein Resonanzfall vorliegt. Die Ableitungen lauten

  $$\begin{aligned} f_p'(x) &= (a-3bx)\sin(3x) + (3ax+b)\cos(3x), \\ f_p''(x) &= -(9ax+6b)\sin(3x) + (6a-9bx)\cos(3x). \end{aligned}$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

  $$-6b\sin(3x) + 6a\cos(3x) \stackrel{!}{=} 3\sin(3x),$$

  was durch Koeffizientenvergleich zu $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$ führt. Damit lautet die Partikulärlösung

  $$f_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos(3x)\ .$$

Insgesamt erhält man die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) - \frac{1}{2}x\cos(3x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Nach Ableiten der allgemeinen Lösung und Einsetzen der Anfangswerte erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{\pi}{12}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= c_2 &&\stackrel{!}{=} 0, \\ -3c_1\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + 3c_2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{4}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -3c_1 + \tfrac{\pi}{4} &&\stackrel{!}{=} -\tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = \frac{\pi}{2}$ und $c_2 = 0$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\cos(3x) - \frac{1}{2}x\cos(3x)\ .$$

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Für die **Lösung des homogenen Systems** ermitteln wir (analog zu 6.4.5) ein Fundamentalsystem. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\chi(X) = (4-X)(2-X)+1 = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = 3$. Damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = e^{3x}, \quad g_2(x) = xe^{3x}.$$

Für die zugehörige Wronskimatrix und ihre Inverse in 0 ergibt sich

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (3x+1)e^{3x} \end{pmatrix}, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von dem ersten Einheitsvektor e_1 erhalten wir die linear unabhängigen Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Lösung des homogenen Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = e_1$ gegeben ist durch

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)e^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix}.$$

Das zweite Element des Fundamentalsystems erhalten wir entweder über

$$\tilde{f}_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} (4+3x)e^{3x} \\ (3x+1)e^{3x} \end{pmatrix}$$

oder über die Bestimmung des Eigenvektors $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, der zur Lösung $f_2(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$ führt.
Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$f_h(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die **Bestimmung einer partikulären Lösung** verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten, der auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$e^{3x} \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2x \end{pmatrix}.$$

was auf $c_1(x) = 2x$, $c_2(x) = -x^2$ und damit auf die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = 2xe^{3x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix} - x^2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} x^2+2x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

führt. Die allgemeine Lösung ist dann durch $f_h + f_p$ gegeben:

$$f(x) = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix} + e^{3x} \begin{pmatrix} x^2+2x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*
Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } \quad -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2}{\pi}x, & \text{für } \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.

(b) Untersuchen Sie, ob f eine 2π-periodische Stammfunktion F besitzt. Wenn ja, geben Sie eine Fourier-Reihe von F an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Da $f(x)$ weder gerade noch ungerade ist, müssen alle Koeffizienten berechnet werden. Für a_0 ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} x\,dx\right) = -1 + \frac{1}{\pi^2}[x^2]_0^{\pi} = 0.$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos(nx)dx + \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} x\cos(nx)\,dx\right) \\
&= \left[-\frac{1}{n\pi}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{2}{n\pi^2}x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right), \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)dx + \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} x\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \left[\frac{1}{n\pi}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{2}{n\pi^2}x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left(1-3(-1)^n\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx) + \frac{1}{n\pi}\left(1-3(-1)^n\right)\sin(nx)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos((2k-1)x) - \frac{1}{k\pi}\sin(2kx) + \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x)\right).
\end{aligned}$$

(b) Da $a_0 = 0$ ist, besitzt f eine 2π-periodische Stammfunktion F, deren Fourierreihe durch gliedweise Integration bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned}
F(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\sin(nx) - \frac{1}{n^2\pi}\left(1-3(-1)^n\right)\cos(nx)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{(2k-1)^3\pi^2}\sin((2k-1)x) + \frac{1}{2k^2\pi}\cos(2kx) - \frac{4}{(2k-1)^2\pi}\cos((2k-1)x)\right).
\end{aligned}$$