Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **BSc el**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 15 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 − 3** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 4 − 6** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 10. 10. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **17. 10.** bis **24. 10. 2011** mit M. Boßle (Raum V 57.8.158) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*12 Punkte*) Gegeben ist die Fläche

$$S: \quad z = y \quad y \geqq 0 \quad 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$$

und das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = \big(-y^2,\ -xy,\ \sin(z^2)\big)^\mathsf{T}.$$

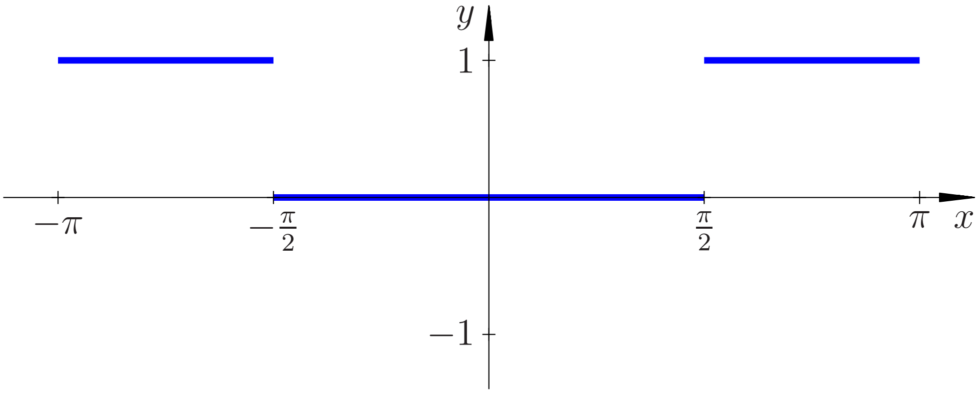
a) Geben Sie eine Parametrisierung von S in Zylinderkoordinaten an und skizzieren Sie S.

b) Berechnen Sie die Oberfläche von S.

c) Bestimmen Sie die Rotation von g und ermitteln Sie mit Hilfe eines Integralsatzes den Betrag des Kurvenintegrals des Vektorfeldes g über den Rand von S:

$$\left| \oint_{\partial S} g\,dx \right| .$$

Aufgabe 2 (*9 Punkte*) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch folgenden Graphen gegeben.



a) Geben Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von f an (Terme der Form $\cos(n\frac{\pi}{2})$ bzw. $\sin(n\frac{\pi}{2})$ müssen in Ergebnissen nicht weiter umgeformt werden).

b) In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen die Funktion f?

c) Bestimmen Sie durch Einsetzen von $x = \pi$ in die reelle Fourier-Reihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) .$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \ ?$$

b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = -\frac{e^{-2x}}{x^2 + 1} .$$

und geben Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung an.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten

und die zugehörigen Eigenräume sind

.

Eine Transformationsmatrix T, die A auf Jordan-Normalform transformiert, lautet

$T =$.

Somit ist die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$Y(x) =$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 3y'' - 4y = f(x)$.

a) Stellen Sie für $f(x) = 0$ das charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen. Hinweis: Die Nullstellen sind ganzzahlig.

$p(\lambda) =$ Nullstellen:

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung an:

c) Geben Sie einen Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = e^x$ an und berechnen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(x)$.

Ansatz = $\boxed{}$ $\quad y_p(x) =$ $\boxed{}$

d) Wie lautet die Laplace-Transformierte der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = 0$?

$L(y)(s) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld g_a mit dem reellen Parameter a

$$g_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y + e^x \sin z \\ 2ax \\ e^x \cos z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g_a$:

$\operatorname{rot} g_a =$ $\boxed{}$.

b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ hat g_a eine Potentialfunktion? Berechnen Sie für dieses a eine Potentialfunktion $u(x, y, z)$.

$a =$ $\boxed{}$ $\quad u(x, y, z) =$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie für $a = \frac{1}{2}$ das Kurvenintegral $I = \displaystyle\int_{C_2} g_a \, dx$ längs einer Strecke von $(1, 1, \pi)$ nach $(0, 0, \pi)$.

$I =$ $\boxed{}$.
