Klausur zur Höheren Mathematik I und II

für Fachrichtungen: el, kyb, mech, phys, tpel

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 15 eigenhändig beschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei den **Aufgaben 1 - 4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
  Bei den **Aufgaben 5 - 9** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 17. 10. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab 24. 10. 2011 nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Hesse (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Hesse-SS11/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*15 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $D = T^\top AT$.

(c) Zeigen Sie, dass $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A^2x = Ax\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von U.

Aufgabe 2 (*9 Punkte*) Gegeben seien die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2} x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n.$$

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien von f und g.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe f konvergiert.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe f absolut konvergiert.

Aufgabe 3 (*11 Punkte*)

(a) Geben Sie für die folgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob sie konvergieren. Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{e^x}{x^3}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2\cos(e^x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie: Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(f(x))^\gamma}\,\mathrm{d}x$ konvergiert für $0 < \gamma < 1$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Taylor.

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 2y^3 + 3x^2y - 6y - 1$. Außerdem sei $v = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}f(x,y)$ von f.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(-1,\,-1)$.

(c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f und bestimmen Sie jeweils, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt.

Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studien-gang:	

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = (0,1,3), \quad B = (1,2,3), \quad C = (1,3,5).$$

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen.

Parameterdarstellung von E :

Hessesche Normalform von E :

(b) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes $P = (4,4,4)$ von der Ebene E.

$d =$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie bei **(a)**–**(c)** an, für welche t die folgenden Aussagen gelten. Wenn es keine solche t gibt, so ist $\emptyset$ einzutragen.

(a) Das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung für $t \in$

(b) Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen für $t \in$

(c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar für $t \in$

(d) Geben Sie die Lösung für $t = 0$ explizit an: $(x_1, x_2, x_3) =$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*)

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{5i}{4+3i} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, +\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$-27i = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -27i\ .$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}$, $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, als auch in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Reihenwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^7 + 3n^2}{7^n + 4n^3} = \boxed{}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^6 + n^2} - \sqrt{n^6 + 5n^2}\right) = \boxed{}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)} = \boxed{}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n} \dfrac{1}{2^{n+3}} = \boxed{}$

Aufgabe 9 (*9 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int x \cos(3x^2)\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

(ii) $\displaystyle\int 3x \sin(x+1)\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

(b) Geben Sie die reelle Partialbruchzerlegung der folgenden Funktion an:

$$\frac{x^2 + x - 3}{(x-4)(x^2+1)} = \boxed{}\,.$$

Berechnen Sie damit

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{(x-4)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \boxed{}\,.$$
