Mathematisches Institut B
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik I/II **Diplomvorprüfung** **3. 9. 2002**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau**, **immo**, **tpbau**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle acht Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 − 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bei den **Aufgaben 3 − 8** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein. In **Aufgabe 3 und 4** wird für jedes richtig gesetzte Kreuz ein Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz ein Minuspunkt vergeben. Die Aufgaben als Ganzes können jedoch nicht mit weniger als 0 Punkten bewertet werden.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 7. 10. 2002 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  VIEL ERFOLG!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 10. 2002 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte) **:** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -7 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Die Matrix A besitzt -1 und 2 als einzige Eigenwerte. Bestimmen Sie die Jordan–Normalform J von A und geben Sie eine Transformationsmatrix T an, so daß $T^{-1}AT = J$ gilt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems.

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung Y_0 des Systems mit

$$\lim_{x \to -\infty} Y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung Y_0 beschreibt eine Kurve im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Abstand dieser Kurve von dem Punkt $P = (1, 0, 0)$.

Aufgabe 2 (15 Punkte) **:** Im $\mathbb{R}^3$ seien in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ E_2 &: \quad x_1 + 2x_2 = -1 \\ E_3 &: \quad 2x_1 + \alpha^2 x_3 = \alpha \end{aligned}$$

gegeben.

a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $D_\alpha = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ die leere Menge, ein Punkt bzw. eine Gerade? Berechnen Sie D_{-1}.

b) Sei E die Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $x_3 = 0$. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichne π_t die Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf E in Richtung des Vektors

$$v_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \\ 3t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von π_t bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $C : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \pi_t(D_{-1})$.

Hinweis: $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{a^2 + t^2} + a^2 \ln(t + \sqrt{a^2 + t^2})\right].$

Name: | | **Matrikel–Nr.:** | |

Fach:

bau ◯	enan ◯	famo ◯	immo ◯	mach ◯	tema ◯	umw ◯

Aufgabe 3 (4 Punkte)**:** Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, mit $n \in \mathbb{N}$. Seien außerdem $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A und $d_1, \dots, d_k$ die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten. E_n sei die Einheitsmatrix der Größe $n \times n$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

$A = \bar{A}$ und A symmetrisch $\Longrightarrow$ A ist diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
$d_1 = \ldots = d_k = 1 \Longrightarrow$ A ist diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
A ist diagonalisierbar $\Longrightarrow$ $\operatorname{Rg} A = n$	wahr ◯	falsch ◯
A ist diagonalisierbar $\Longrightarrow$ $A^4 - A^3 + E_n$ ist diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯

Aufgabe 4 (4 Punkte)**:** Sei $I = [a, b]$ ein Intervall ($a < b$), und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf I. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

f ist integrierbar auf I $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar auf I	wahr ◯	falsch ◯
Es gibt ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$	wahr ◯	falsch ◯
f besitzt auf I ein Minimum	wahr ◯	falsch ◯
$f(x) > 0$ auf I $\Longrightarrow$ $\sqrt{f}$ besitzt die Ableitung $\dfrac{1}{2\sqrt{f}}$	wahr ◯	falsch ◯

Aufgabe 5 (5 Punkte)**:** Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 2 & 3\mathrm{i}+1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} & 7 \\ 2 & 7 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $v = (-1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$. Berechnen Sie

$\det(A^2 B^2) = \boxed{}$ $\quad$ $\operatorname{sp}(A^{-1}BA) = \boxed{}$ $\quad$ $\operatorname{Rg}(A + E_3) = \boxed{}$

$v^{\mathrm{t}} A v = \boxed{}$ $\quad$ $\langle v \times Cv, v\rangle = \boxed{}$

Aufgabe 6 (3 Punkte)**:** Bestimmen Sie für jede der folgenden Potenzreihen ihren Konvergenzradius r:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\cosh n)\, x^n\,, \quad r = \boxed{} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 5^{\sqrt{n}}\, x^n\,, \quad r = \boxed{}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^6 + n^5 + 1}\,(2x)^n\,, \quad r = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**:** Berechnen Sie für jede der folgenden Funktionen die ersten vier Glieder ihrer Taylor–Entwicklung, jeweils zum angegebenen Entwicklungspunkt x_0:

$f_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0.$

$$f_1(x) = \boxed{} + \boxed{}\, x + \boxed{}\, x^2 - \boxed{}\, x^3 + \dots$$

$f_2(x) = \dfrac{1}{1+2x}\,, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad x_0 = 0.$

$$f_2(x) = \boxed{} - \boxed{}\, x + \boxed{}\, x^2 - \boxed{}\, x^3 + \dots$$

$f_3(x) = \sqrt{x+1}\,, \quad x \in (-1, \infty), \quad x_0 = 3.$

$$f_3(x) = \boxed{} + \boxed{}\, (x-3) - \boxed{}\, (x-3)^2 + \boxed{}\, (x-3)^3 + \dots$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)**:** Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 10}{(x+1)^2(x^2+4)}$.

Kreuzen Sie den geeigneten Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung von f an und berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

$f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2+1} + \dfrac{c}{x+2} + \dfrac{d}{x-2}$ ○	$f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c+dx}{x^2+4}$ ○
$f(x) = \dfrac{a+bx}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x+2} + \dfrac{d}{x-2}$ ○	$f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2+1} + \dfrac{c+dx}{x^2+4}$ ○

$$a = \boxed{} \qquad b = \boxed{} \qquad c = \boxed{} \qquad d = \boxed{}$$

Berechnen sie eine Stammfunktion F von f.

$$F(x) = \boxed{}$$